

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
ANALYSE, ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE

MÉMOIRE DE M2

Le spectre d'une surface hyperbolique compacte aléatoire

Laura MONK

*Travail encadré par Nalini ANANTHARAMAN
à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg
de mars à juin 2018.*

Soutenu le 6 septembre 2018



Table des matières

Introduction	7
1 Théorie spectrale des surfaces hyperboliques compactes	9
1.1 Notion de surface hyperbolique	9
1.1.1 Le demi-plan de Poincaré	9
1.1.2 Surface hyperbolique	11
1.2 Laplacien d'une surface hyperbolique	14
1.2.1 Laplacien en géométrie riemannienne	14
1.2.2 Laplacien en tant qu'opérateur non borné sur un espace de Hilbert	18
1.2.3 Le cas du demi-plan de Poincaré	19
1.2.4 Opérateurs à noyau et transformée de Selberg	20
1.3 Étude du spectre d'une surface hyperbolique compacte	22
1.3.1 Théorème spectral	23
1.3.2 Principe du min-max et inégalités de Cheeger	23
1.3.3 Formule des traces de Selberg	24
1.3.4 Position du spectre par rapport à la valeur $1/4$	24
2 Théorie spectrale des graphes finis réguliers, et approche probabiliste	27
2.1 Matrice d'adjacence et laplacienne	27
2.1.1 Définitions et notations	27
2.1.2 Spectre d'un graphe d -régulier	29
2.2 Graphes de Ramanujan	31
2.2.1 Définition et théorème d'Alon-Boppana	31
2.2.2 Cutoff de la marche aléatoire sur des graphes de Ramanujan	32
2.2.3 Existence des graphes de Ramanujan	33
2.2.4 Probabilité qu'un graphe soit <i>presque</i> de Ramanujan	34
2.3 Convergence de Benjamini-Schramm vers \mathbb{T}_d	34
3 Surfaces hyperboliques compactes aléatoires, et leurs propriétés spectrales	37
3.1 Ensemble des surfaces hyperboliques compactes	37
3.1.1 Espace de Teichmüller	37
3.1.2 Construction à base de pantalons et paramètres de Fenchel-Nielsen	39
3.1.3 Espace des modules	40
3.2 Densité de probabilité sur l'espace des modules	41
3.2.1 Le volume de Weil-Petersson	41
3.2.2 Intégration sur l'espace des modules	42
3.2.3 Quelques quantités quand le genre est grand	42
3.3 Convergence de Benjamini-Schramm	47

Conclusion et perspectives	53
Volume de Weil-Petersson	53
Approches combinatoires	54

Remerciements

Je souhaite avant tout remercier ma Directrice de mémoire, Nalini ANANTHARAMAN, pour le temps qu'elle m'a consacré, son enthousiasme mathématique et son exigence.

Je remercie également l'équipe de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée et ses doctorants pour leur accueil chaleureux, et en particulier Alix DELEPORTE pour son soutien et ses nombreux conseils.

La qualité de l'enseignement du Master Analyse Arithmétique Géométrie de l'Université Paris Sud a été déterminante dans mon choix de mémoire, et m'a donné de nombreux outils et pistes. Je remercie le responsable pédagogique Frédéric BOURGEOIS et mes professeurs.

J'ai eu la chance au cours de mon stage de participer aux Journées de physique mathématique de Lyon au sujet du chaos quantique, et qui m'ont beaucoup appris. Un grand merci aux organisateurs, aux orateurs et aux participants, notamment à Étienne LE MASSON pour son cours et les discussions qui ont suivies.

Enfin, rien de tout cela n'aurait été possible sans l'aide logistique de Michèle AUDIN et Claude SABBAH, ainsi que le soutien de mon conjoint, de ma famille et de mes ami-e-s, à qui j'exprime toute ma reconnaissance.

Introduction

Le laplacien est un objet de la physique, qui intervient dans de nombreuses équations d'évolution comme celles de la chaleur, des ondes et de Schrödinger. En mathématiques, l'étude de cet objet établit des liens très pertinents entre théorie spectrale, étude géométrique des surfaces de Riemann, systèmes dynamiques et arithmétique. L'étude du spectre du laplacien d'une surface donnée est très complète, mais un certain nombre de questions y restent ouvertes. Ces questions concernent notamment d'une part le comportement à haute fréquence du spectre et des fonctions propres, mais aussi les petites valeurs propres des surfaces compactes.

Il existe une notion de laplacien défini sur les graphes, qui correspond à une discrétisation du laplacien des surfaces. Les avancées récentes en théorie spectrale des graphes réguliers ont en commun l'utilisation d'arguments probabilistes, d'une manière ou une autre : choix d'un graphe aléatoire, revêtement aléatoire, marche aléatoire sur un graphe, convergence de Benjamini-Schramm, etc. Les similarités entre les résultats d'étude du laplacien d'une surface hyperbolique de grand genre et celui d'un graphe régulier de grande taille poussent à se poser la question suivante : qu'est-ce qu'une approche probabiliste peut apporter à la théorie spectrale des surfaces hyperboliques ?

Au cours de ce stage, nous avons exploré la notion de surface hyperbolique compacte aléatoire. Le point de vue que nous avons principalement adopté consiste à munir l'ensemble des surfaces hyperboliques, l'espace des modules, d'une mesure de probabilité provenant de la mesure de Weil-Petersson ; cette approche a été suivie avec succès d'un point de vue géométrique par Mirzakhani [31] et Guth-Parlier-Young [16]. En couplant cette approche avec l'importation de la notion de convergence de Benjamini-Schramm, inspirée de Le Masson-Sahlsten [21], nous avons démontré une majoration avec haute probabilité du nombre de petites valeurs propres d'une surface hyperbolique compacte aléatoire de grand genre.

Le chapitre 1 de ce mémoire introduit les notions de base de géométrie hyperbolique et de théorie spectrale déterministe. Le chapitre 2 énonce les résultats récents de théorie spectrale des graphes réguliers, et détaille certains aspects des démonstrations pertinents. Enfin, le chapitre 3 explore la notion de surface aléatoire selon la mesure de Weil-Petersson. Dans la conclusion sont proposées un certain nombre de pistes et d'idées, et qui pourront éventuellement être explorées par la suite.

Chapitre 1

Théorie spectrale des surfaces hyperboliques compactes

1.1 Notion de surface hyperbolique

Dans tout ce mémoire, les surfaces étudiées sont des surfaces hyperboliques. Dans cette section, je récapitule rapidement et sans preuve les aspects de la géométrie hyperbolique qui sont nécessaires ou pertinents.

1.1.1 Le demi-plan de Poincaré

Métrique, distance et géodésiques La surface hyperbolique de base est le demi-plan de Poincaré, qui est l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive :

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}, \quad (1.1)$$

muni de la métrique suivante, qui est hyperbolique (de courbure -1) :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (1.2)$$

Cette métrique est une dilatation conforme de la métrique euclidienne, donc les angles hyperboliques et euclidiens sont les mêmes. Les géodésiques sont en revanche changées : il s'agit des demi-droites verticales et des demi-cercles orthogonaux à l'axe réel (voir Figure 1.1). Par chaque paire de points

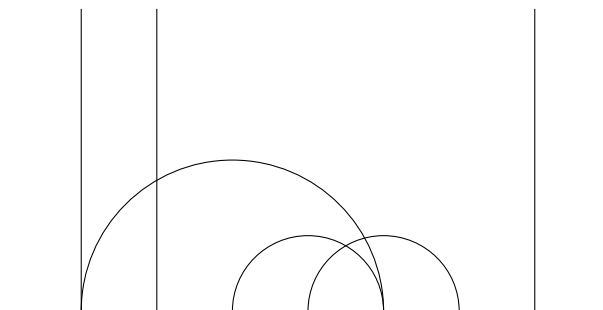


FIGURE 1.1 – Des droites du plan hyperbolique.

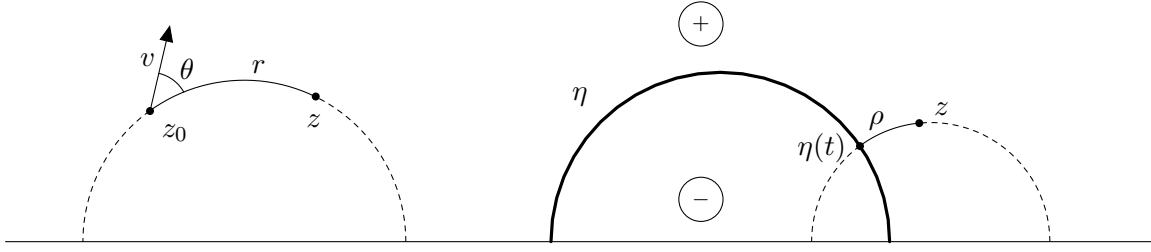


FIGURE 1.2 – Les coordonnées polaires de centre z_0 et de vecteur v à gauche, et les coordonnées de Fermi de base η à droite.

distincts passe une unique géodésique. Leurs extrémités appartiennent au *bord* de \mathcal{H} défini comme étant :

$$\partial\mathcal{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (1.3)$$

Une grande spécificité de la géométrie hyperbolique, par rapport à la géométrie euclidienne ou en courbure positive, est que deux géodésiques ne peuvent pas être partout proches l'une de l'autre. Cela a pour conséquence que sur une surface hyperbolique compacte, dans une classe d'homotopie, il n'y a qu'une seule géodésique (voir le Théorème 3).

La distance hyperbolique d correspondant à cette métrique est donnée par la formule :

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad (1.4)$$

Le cercle hyperbolique de centre $z = x + iy$ et de rayon $\rho > 0$ est le cercle euclidien de centre $x + iy \cosh \rho$ et de rayon $y \sinh \rho$.

La forme volume associée est :

$$d\mu = \frac{dx dy}{y^2}. \quad (1.5)$$

Elle définit une mesure μ sur le plan hyperbolique. Le volume hyperbolique d'un cercle de rayon ρ est $2\pi(\cosh(\rho) - 1)$.

Coordonnées polaires Soit $z_0 \in \mathcal{H}$ un point de base arbitraire, et v un vecteur fixé. Pour un point $z \in \mathcal{H}$ distinct de z_0 , notons r la distance hyperbolique de z à z_0 , et θ l'angle entre v et la tangente orientée au point z_0 à la géodésique partant de z_0 et passant par z (voir la Figure 1.2). Ces deux quantités constituent un système de coordonnées sur $\mathcal{H} \setminus \{z_0\}$ appelées *coordonnées polaires* basées en z_0 . Pour ces coordonnées, la métrique hyperbolique s'exprime :

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2. \quad (1.6)$$

Coordonnées de Fermi Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ une géodésique. Elle sépare \mathcal{H} en deux composantes connexes, auxquelles on associe arbitrairement les signes $+$ et $-$ respectivement. Pour $z \in \mathcal{H}$, notons ρ la distance signée de η à z (elle est du signe correspondant à la composante dans laquelle z se trouve). Notons que si z appartient à η , alors $\rho = 0$ donc il n'y a pas d'ambiguïté. Le point pour lequel cette distance est atteinte est $\eta(t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Les nombres $(t, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont appelés *coordonnées de Fermi* de base η . Pour ces coordonnées, la métrique hyperbolique s'exprime :

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2. \quad (1.7)$$

Nom	hyperbolique	parabolique	elliptique
Trace	$t > 2$	$t = 2$	$t < 2$
Points fixes	deux dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	un dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	un dans \mathcal{H} (et son conjugué)
Conjugué à	$\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ $t = \lambda + 1/\lambda$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \neq 1$	$\pm \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $v \in \mathbb{R}$	$\pm \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $t = 2 \cos \theta $ $\theta \in [0, \pi[$
Explicitement	la dilatation $z \mapsto \lambda^2 z$	la translation $z \mapsto z + v$	une rotation de centre i
De points fixes	0 et ∞	∞	i (et $-i$)

TABLE 1.1 – Classes de conjugaison des isométries positives de \mathcal{H}

Isométries positives Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de déterminant 1, au signe près. Il agit sur \mathcal{H} par homographies de l'espace projectif $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$:

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (1.8)$$

Ces transformations sont des isométries positives¹ de \mathcal{H} , qui s'étendent en des homéomorphismes de $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}$.

Théorème 1. Les isométries positives de \mathcal{H} sont exactement les transformations de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un sous-groupe d'indice 2 de l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ des isométries de \mathcal{H} . Si l'on y ajoute la symétrie $z \mapsto -\bar{z}$, alors cela engendre $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$.

Les isométries positives $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de \mathcal{H} , l'identité mise à part, se classifient selon au choix leurs points fixes dans $\overline{\mathcal{H}}$, ou leur trace $t = |a + d|$. Chacune est conjuguée à un unique représentant présenté dans la Table 1.1.

Les transformations hyperboliques nous intéresseront particulièrement. Parmi leur deux points fixes, il y en a un qui est attractif et l'autre répulsif². La géodésique qui les relie est appelée l'*axe* de la transformation. L'axe est stable, et la distance hyperbolique qui sépare un point quelconque de l'axe et son image est appelée *longueur de translation* ℓ de la transformation. Elle vérifie la relation avec la trace suivante :

$$t = 2 \cosh(\ell/2). \quad (1.9)$$

1.1.2 Surface hyperbolique

Définition 1. Une *surface hyperbolique* est un atlas maximal \mathcal{A} sur une surface³ X à valeurs dans \mathcal{H} tel que :

- Pour tout point $z \in X$ il existe une carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ telle que $\varphi(U)$ soit :
 1. un disque hyperbolique centré en $\varphi(z)$;
 2. un demi-disque hyperbolique centré en $\varphi(z)$, délimité par une géodésique de \mathcal{H} passant par $\varphi(z)$;
 3. un secteur angulaire centré en $\varphi(z)$, c'est-à-dire la portion d'un disque hyperbolique comprise entre deux géodésiques distinctes de \mathcal{H} passant par $\varphi(z)$.
- Les changements de carte sont des restrictions d'isométries positives de \mathcal{H} .

1. Positive signifie préservant l'orientation.

2. Un point fixe z d'une transformation $f : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$ est *attractif* si $|f'(z)| < 1$ et *répulsif* $|f'(z)| > 1$.

3. Une surface est une variété différentielle \mathcal{C}^∞ orientable de dimension 2, sans bord ou à bord lisse par morceaux, complète.

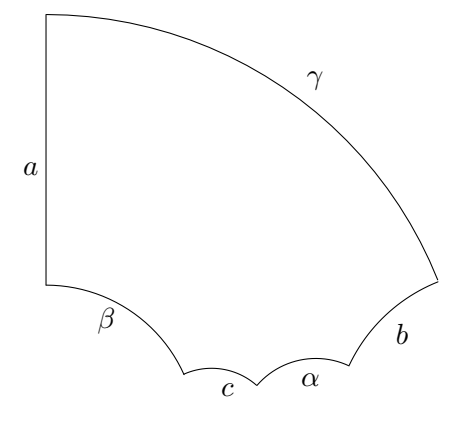
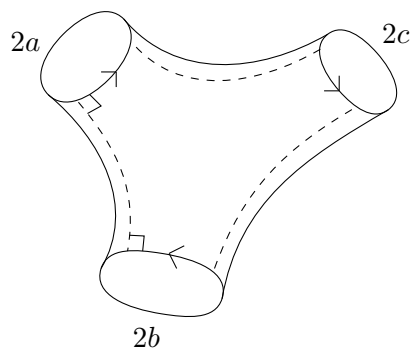
FIGURE 1.3 – Un hexagone orthogonal de côtés a , b et c .

FIGURE 1.4 – Un pantalon hyperbolique

Chaque point de X ne peut se placer que dans un cas de la définition précédente. Ces points sont alors appelés respectivement *points intérieurs*, *points ordinaires du bord* et *sommets*.

Sous des conditions adaptées, les surfaces hyperboliques peuvent être collées les unes aux autres, ou quotientées par des sous-groupes d'isométries ; [9] donne plus de précisions concernant ces constructions.

La métrique hyperbolique sur le plan hyperbolique induit une métrique hyperbolique sur la surface, et ainsi une distance, un volume.

Pantalons hyperboliques

Étant données trois longueurs strictement positives a , b et c , il existe à isométries près un unique hexagone orthogonal dans la disposition représentée en figure 1.3. Les formules de trigonométries hyperboliques [9] permettent alors d'exprimer les longueurs α , β et γ en fonction de a , b et c .

Le résultat obtenu en collant deux copies de cet hexagone le long des côtés α , β et γ est appelé *pantalon hyperbolique*, de longueurs extrémales $2a$, $2b$ et $2c$ (voir Figure 1.4). À isométrie près, c'est l'unique ayant ces longueurs extrémales. Il s'agit d'une surface de signature $(0, 3)$, qui sera un bloc élémentaire très pratique pour construire les surfaces générales (voir la section 3.1).

Revêtement universel et groupes Fuchsien

Le revêtement universel d'une surface hyperbolique est déterminé par l'énoncé suivant :

Théorème 2 ([9]). Soit X une surface hyperbolique. Le revêtement universel \tilde{X} de X est isométrique à un convexe de \mathcal{H} à bord géodésique par morceaux. Si X n'a pas de bord, alors \tilde{X} est isométrique à \mathcal{H} .

Une surface hyperbolique sans bord X se réalise donc comme un quotient \mathcal{H}/Γ , où Γ est un *groupe Fuchsien*, c'est-à-dire un sous-groupe discret du groupe $\text{Isom}^+(\mathcal{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Un sous-groupe Γ de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est Fuchsien si et seulement s'il agit de manière proprement discontinue sur \mathcal{H} . Les résultats présentés ici sont tirés de [19], et la lectrice pourra y trouver plus de précisions.

Le groupe Γ , construit comme étant le groupe fondamental de la surface X , ne peut contenir d'élément elliptique avec notre définition de surface hyperbolique ; si c'était le cas, \mathcal{H}/Γ serait un orbifold, dont les points coniques sont les points fixes des éléments elliptiques. Si Γ contient un élément parabolique, alors le point fixe de celui-ci correspond à une pointe (ou en anglais *cusps*) sur la surface X (et en particulier elle n'est pas compacte).

Un *domaine fondamental* D de $X = \mathcal{H}/\Gamma$ est une partie $D \subset \mathcal{H}$ fermée telle que :

- \mathcal{H} est l'union de $\gamma \cdot D$, où γ parcourt Γ ;
- Pour toute transformation $\gamma \in \Gamma$ différente de id , les intérieurs $\overset{\circ}{D}$ et $\gamma \cdot \overset{\circ}{D}$ sont disjoints.

Si la frontière de D est de mesure hyperbolique nulle, alors $\mu(D)$ est l'aire $\mu(X)$. Toute surface hyperbolique X admet un domaine fondamental connexe et hyperboliquement convexe⁴, et dont la frontière est de mesure nulle. C'est par exemple le cas du domaine de Dirichlet associé à un point $z_0 \in \mathcal{H}$ qui n'est fixé par aucun élément non trivial de Γ , défini comme étant :

$$D_{z_0}(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} : \forall \gamma \in \Gamma, d(z, z_0) \leq d(\gamma \cdot z, z_0)\}. \quad (1.10)$$

$D_{z_0}(\Gamma)$ est une intersection discrète d'hyperplans, dont les frontières sont des médiatrices hyperboliques entre les relevés de z_0 dans \mathcal{H} .

Si la surface X est compacte, alors on dit que Γ est *cocompact*. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes [19] :

- Γ est cocompact ;
- Les domaines de Dirichet de X sont compacts ;
- X est d'aire hyperbolique finie, et Γ ne contient pas d'éléments paraboliques.

Ceci implique que Γ ne contient que des éléments hyperboliques.

Géodésiques fermées sur une surface hyperbolique

Définition 2. Une *géodésique fermée* sur une surface X est un lacet $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ qui est une géodésique sur X . On note $\ell(c)$ sa longueur. Une géodésique fermée c est dite *primitive* si elle ne peut s'écrire sous la forme c_0^m , où c_0 est une géodésique fermée et $m \geq 2$. Toute géodésique fermée c s'écrit de manière unique c_0^m où c_0 est une géodésique fermée primitive, $m \in \mathbb{N}^*$. On notera $\Lambda(c)$ la longueur de c_0 .

Un résultat fondamental, propre à la géométrie hyperbolique, est le suivant :

Théorème 3 ([9]). Soit X une surface hyperbolique compacte.

Soit c un lacet sur X . Alors c est librement homotope à une unique géodésique fermée γ_c sur X . Si c est simple⁵, alors cette géodésique est simple.

Si c et c' sont des lacets sur X ayant n points d'intersection, alors il y a deux cas de figure :

- les géodésiques γ_c et $\gamma_{c'}$ sont confondues ;
- les géodésiques γ_c et $\gamma_{c'}$ sont distinctes, auquel cas elles ont au plus n points d'intersection.

4. Une partie $D \subset \mathcal{H}$ est *hyperboliquement convexe* si pour tout couple de points de D , la géodésique les reliant dans \mathcal{H} est incluse dans D .

5. Un lacet $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ est *simple* s'il est injectif.

En particulier, si c et c' sont disjointes et dans deux classes d'homotopie distinctes, alors γ_c et $\gamma_{c'}$ sont disjointes.

Ce résultat établit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental Γ de X , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets sur X , et l'ensemble des géodésiques fermées sur X . Ainsi, dans la suite, un élément γ de Γ sera indifféremment une classe d'homotopie libre, ou la géodésique fermée qu'elle contient.

Le *spectre des longueurs marqué* de la surface hyperbolique compacte X est définie comme étant :

$$\begin{aligned} \Gamma &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \gamma &\mapsto \ell(\gamma). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Il fait correspondre aux classes d'homotopie la longueur de la géodésique qu'elle contiennent. L'image de cette fonction, ordonnée, est appelée *spectre des longueurs*, et correspond à l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées sur X .

Un élément γ de Γ est également une isométrie de \mathcal{H} . Comme X est compacte, γ est une transformation hyperbolique. Son axe correspond, après passage au quotient, à une géodésique fermée de X , dont la longueur est la longueur de translation de la transformation γ . Ceci donne lieu, grâce à (1.9), à la relation suivante :

$$t(\gamma) = 2 \cosh(\ell(\gamma)/2). \tag{1.12}$$

Ce point de vue, réalisant Γ comme l'ensemble des géodésiques fermées de X et des isométries de \mathcal{H} conservant X , permettra d'aboutir à la formule des traces de Selberg dans la section 1.3.3.

Rayon d'injectivité

Soit X une surface hyperbolique, et z un point intérieur de X . Le *rayon d'injectivité* au point z est le suprémum des $r > 0$ tels que la boule de centre z et de rayon r dans X est isométrique à une boule de rayon r dans \mathcal{H} ; il est noté $\text{InjRad}_z(X)$. Le *rayon d'injectivité global* $\text{InjRad}(X)$ est l'infimum des rayons d'injectivité ponctuels.

Par définition d'une surface hyperbolique, il est nécessairement strictement positif. Il peut également être directement défini à partir de l'action de Γ :

$$\text{InjRad}_z(X) = \frac{1}{2} \min\{d(z, \gamma \cdot z), \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}\}. \tag{1.13}$$

Une *boucle géodésique* est une géodésique $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ dont les extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont confondues. Il ne s'agit pas nécessairement d'une géodésique fermée. Le rayon d'injectivité en z est la moitié de la longueur de la plus petite boucle géodésique passant par z , qui est une courbe fermée simple. La distance de z à la géodésique fermée simple dans sa classe d'homotopie est au plus $2\text{InjRad}_z(X)$. note : Cette affirmation issue de [31] est fausse!! Cela a des conséquences sur les estimées de la suite (voir article en cours de rédaction).

Le rayon d'injectivité global est la moitié de la longueur de la *systole* de X , c'est-à-dire de sa plus petite géodésique fermée. Elle est nécessairement simple. De plus, l'infimum dans la définition du rayon d'injectivité global est atteint pour tout point de la systole.

1.2 Laplacien d'une surface hyperbolique

1.2.1 Laplacien en géométrie riemannienne

Définition

Soit M une variété Riemannienne lisse connexe de dimension $m \geq 1$. Si M a un bord ∂M , supposons que M est orientée, et que ce bord est lisse. Sous ces hypothèses, les notions de *gradient* d'une fonction

et de *divergence* d'un champs de vecteurs sont bien définies (voir le chapitre 2 de [13]), et nous pouvons définir le laplacien d'une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ comme étant :

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f). \quad (1.14)$$

L'opérateur Δ est également appelé *opérateur de Laplace-Beltrami*. Il envoie linéairement les fonctions de classe \mathcal{C}^k sur des fonctions de classe \mathcal{C}^{k-2} , pour $k \geq 2$. De plus, il vérifie la propriété multiplicative suivante :

$$\Delta(fh) = f \Delta h - 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) + h\Delta f. \quad (1.15)$$

Expression dans les cartes

Le laplacien d'une fonction lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ s'exprime en coordonnées locales de la sorte :

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{j,k=1}^m \partial_j (g^{jk} \sqrt{\det g} \partial_k f) \quad (1.16)$$

où ∂_j est la différentiation par rapport à la j -ième coordonnée, (g_{jk}) est le tenseur de la métrique, $\det g$ est son déterminant et (g^{jk}) son inverse.

Dans le cas particulier de \mathbb{R}^m muni de la métrique plate, le laplacien a l'expression usuelle suivante :

$$\Delta f = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}. \quad (1.17)$$

Notons que le signe moins, qui pas habituel en physique, est choisi ici afin d'obtenir plus loin des valeurs propres positives (voir la section 1.3.1).

Sur le demi-plan de Poincaré, le laplacien s'exprime dans les coordonnées habituelles :

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (1.18)$$

ou en coordonnées polaires :

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{\tanh r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{(2 \sinh r)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.19)$$

Commutation avec les isométries

Une propriété fondamentale du laplacien est qu'il commute avec les isométries, c'est-à-dire que si γ est une isométrie de M , et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse, alors :

$$\Delta(f \circ \gamma) = (\Delta f) \circ \gamma. \quad (1.20)$$

Cela en fait un objet très naturel en physique, car il ne dépend pas du repère choisi. Le laplacien est en quelque sorte l'opérateur différentiel « le plus simple » qui vérifie cette propriété. Plus précisément, l'algèbre des opérateurs différentiels sur les fonctions qui commutent avec les isométries est une algèbre polynomiale en Δ [3].

C'est cette propriété qui permettra de ramener l'étude du laplacien sur une surface obtenue comme un quotient \mathcal{H}/Γ (voir la section 1.1.2) à celle du laplacien sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} , à condition de ne l'appliquer qu'à des fonctions Γ -périodiques. Cela aura également des applications dans l'étude du spectre du laplacien sur des surfaces ayant des isométries d'ordre fini (voir la section 3.3 par exemple).

Interprétation physique

En tant que $-\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, le laplacien joue un rôle essentiel en physique. D'un point de vue statique, il lie le potentiel gravitationnel V et la densité de masse ρ :

$$-\Delta V = 4\pi G\rho. \quad (1.21)$$

De même, en électrostatique, pour un potentiel V et une densité de charge ρ ,

$$\Delta V = \rho/\varepsilon_0. \quad (1.22)$$

Le laplacien permet de mettre en équations certains processus physiques qui évoluent dans le temps, en particulier lorsque des quantités se propagent dans l'espace : ondes, chaleur, soluté dans un solvant... Ces équations d'évolution s'établissent généralement en effectuant des bilans de matière ou d'énergie locaux, dans des petits domaines, et en utilisant les formules intégrales comme la formule d'Ostrogradski (qui est une conséquence de la formule de Stokes).

L'équation de la chaleur modélise l'évolution de la température $T : M \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en régime linéaire dans un milieu M sans radiation au coefficient de diffusion thermique D . Si D est homogène, alors elle s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -D \Delta T. \quad (1.23)$$

Si la frontière de M est isolante, s'ajoute la condition au bord :

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial M, \quad (1.24)$$

où ν est le champ de vecteurs unitaire normal sortant sur ∂M . Si cette fois la frontière de M est à une température fixée (que l'on peut supposer nulle quitte à changer l'origine des températures), la condition au bord s'écrit :

$$T = 0 \text{ sur } \partial M. \quad (1.25)$$

Cette façon de décrire l'évolution d'une quantité physique n'est pas propre à ce problème : il s'agit de l'équation de la diffusion, qui s'applique dans de nombreuses autres situations. Par exemple, la concentration C d'un solvant dans un soluté vérifie la même équation, où D est un coefficient de diffusion qui dépend des espèces considérées.

L'équation d'onde décrit la propagation d'une onde sur une membrane M à bords fixés. Si les oscillations sont supposées petites, et $h : M \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la valeur algébrique de la vibration transverse à la surface, alors elle vérifie :

$$\begin{cases} \Delta h + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 & \text{sur } M \times]0, +\infty[\\ h = 0 & \text{sur } \partial M \times]0, +\infty[\end{cases} \quad (1.26)$$

où ρ et τ sont la densité et la tension de la membrane. La première équation décrit la propagation de l'onde sur la surface, et la deuxième impose la fixité du bord. Si le bord est libre, alors la condition au limite devient celle de Neumann, c'est-à-dire que l'annulation de la dérivée sortante comme dans (1.24).

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger décrit l'évolution d'une particule, représentée par une onde ψ , soumise à un opérateur de Schrödinger \hat{H} . Elle s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (1.27)$$

Par exemple, pour une particule de masse m soumise à un champ de forces générés par un potentiel V , l'opérateur \hat{H} vaut $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$. On constate que cette équation est de la même forme que l'équation d'onde, à la multiplication par i près, qui transforme l'amortissement d'une onde sur le long terme

en oscillations autour d'états stables. La quantité $|\psi(x, t)|^2$ représente la probabilité de présence de la particule au point x à l'instant t .

Pour approcher la résolution de ces équations aux dérivées partielles, il est possible de séparer les variables, c'est-à-dire de chercher les solutions sous la forme $(x, t) \mapsto a(t)\varphi(x)$. Alors, par exemple pour l'équation de la diffusion, les fonctions doivent vérifier :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) \\ a'(t) = -\lambda D a(t). \end{cases} \quad (1.28)$$

Ainsi, la partie spatiale φ est une fonction propre du laplacien. Le laplacien n'ayant que des valeurs propres positives (voir la section 1.2.2), la partie temporelle $a(t) = c e^{-\lambda D t}$ s'atténue avec le temps, ce qui est attendu pour des problèmes de diffusion. Ceci motive l'étude des fonctions propres du laplacien. Nous étudierons trois problèmes propres sur M , qui consistent à trouver $\varphi \in \mathcal{C}^2(M)$ telle que :

— quand M n'a pas de bord (problème fermé),

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi ; \quad (1.29)$$

— pour le problème de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{sur } M \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial M ; \end{cases} \quad (1.30)$$

— pour le problème de Neumann,

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{sur } M \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \partial M. \end{cases} \quad (1.31)$$

Ces différentes conditions aux bords correspondent à celles de l'équation de la chaleur et des ondes. Nous pouvons également considérer des conditions aux bords mixtes (de Dirichlet sur certaines parties du bord, et de Neumann pour d'autres), voir [12].

Sous certaines conditions, comme la compacité de M (voir la section 1.3.1), toutes les fonctions pourront se décomposer en somme $T(x, t) = \sum_{j \geq 0} a_j(t)\varphi_j(x)$, où $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont des fonctions propres du laplacien, de valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Alors, les solutions de l'équation de la chaleur seront de la forme :

$$T(x, t) = \sum_{j \geq 0} c_j e^{-\lambda_j D t} f_j(x). \quad (1.32)$$

De la même manière, les solutions de l'équation de Schrödinger, si cette fois l'opérateur diagonalisé est $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$, et a pour états propres $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de valeurs propres $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$, sont de la forme :

$$\psi(x, t) = \sum_{j \geq 0} c_j e^{-iE_j t/\hbar} \psi_j(x). \quad (1.33)$$

Les énergies du système (émises ou absorbées) sont quantisées, et sont les différences $E_j - E_k$.

Formule de Green

La formule de Green est un moyen de faire un lien entre les valeurs des fonctions à l'intérieur d'une surface et sur son bord. Elle est une conséquence directe de la formule de Stokes [15]. Elle s'énonce différemment si M a un bord ou non :

Théorème 4 (Formule de Green). Soient f et h des fonctions lisses sur M .

1. Si M n'a pas de bord, alors :

$$\int_M (h\Delta f - g(\text{grad } h, \text{grad } f)) \, dV = 0. \quad (1.34)$$

2. Si \bar{M} est compacte orientée et a un bord ∂M , notons dA la mesure sur ∂M associée à la métrique que M induit sur ∂M . Alors,

$$\int_M (h\Delta f - g(\text{grad } h, \text{grad } f)) dV = - \int_{\partial M} h \frac{\partial f}{\partial \nu} dA. \quad (1.35)$$

Ici, la mesure dV est la mesure induite par la métrique définie sur M . Une conséquence de la formule de Green est que, si l'on munit $\mathcal{C}^\infty(M)$ du produit :

$$\langle f, h \rangle = \int_M \bar{f}h dV. \quad (1.36)$$

alors, pour des fonctions f et h de $\mathcal{C}^\infty(M)$, vérifiant de bonnes conditions sur l'éventuel bord de M afin d'annuler le terme de droite de (1.35), le laplacien est symétrique :

$$\langle \Delta f, h \rangle = \langle f, \Delta h \rangle \quad (1.37)$$

et positif :

$$\langle \Delta f, f \rangle = \|\text{grad } f\|^2 \geq 0. \quad (1.38)$$

1.2.2 Laplacien en tant qu'opérateur non borné sur un espace de Hilbert

Espaces fonctionnels associés à une surface hyperbolique

Nous allons maintenant définir l'opérateur laplacien comme un opérateur non borné sur l'espace $L^2(M)$, l'espace des fonctions sur M de carré intégrable pour la mesure canonique dV associée à la métrique g . Il est défini comme étant le complété de $\mathcal{C}^\infty(M)$ pour le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par (1.36).

Comme le laplacien est un opérateur différentiel d'ordre 2, nous ne pourrons pas le définir sur tout le domaine $L^2(M)$. Nous définissons ainsi des espaces de Hilbert intermédiaires qui seront adaptés pour le construire.

L'espace $L^2_\chi(M)$ est défini comme étant le complété de l'ensemble $\chi(M)$ des champs de vecteurs continus sur M par le produit :

$$(X, Y) = \int_M g(\bar{X}, Y) dV. \quad (1.39)$$

Il correspond à l'espace des champs de vecteurs mesurables sur M (c'est-à-dire dont les coefficients dans les cartes sont mesurables), et tels que l'intégrale (1.39) converge.

L'espace de Sobolev $H^1(M)$ est le complété de $\mathcal{C}^\infty(M)$ par le produit :

$$\langle f, h \rangle_1 = \langle f, h \rangle + (\text{grad } f, \text{grad } h). \quad (1.40)$$

Il s'identifie par l'injection $H^1(M) \rightarrow L^2(M)$ en un sous-espace dense de $L^2(M)$. Il est plus concrètement l'ensemble des fonctions $f \in L^2(M)$ ayant une *dérivée faible* dans $L^2_\chi(M)$, c'est-à-dire telles qu'il existe $Y \in L^2_\chi(M)$ tel que pour tout champ de vecteur X sur M de régularité \mathcal{C}^1 ,

$$(Y, X) = -(f, \text{div } X). \quad (1.41)$$

Dans ce cas, Y est unique et noté $\text{grad } f$.

Si M a un bord, alors le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(M)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ est l'espace $H_0^1(M) \subset H^1(M)$.

Définitions du laplacien

Nous allons construire un opérateur laplacien pour chacun des problèmes propres.

Plaçons-nous pour le moment dans le cas où M n'a pas de bord. Considérons la forme bilinéaire de domaine $H^1(M)$:

$$B(f, h) = (\text{grad } f, \text{grad } h). \quad (1.42)$$

Il s'agit d'une forme fermée sur l'espace $L^2(M)$. Elle induit un opérateur autoadjoint Δ sur un domaine $D(\Delta)$ dense dans $L^2(M)$, qui est l'ensemble des $\varphi \in H^1(M)$ tels que la forme linéaire $f \in H^1(M) \mapsto B(\varphi, f)$ s'étende continûment sur $L^2(M)$, et ainsi tels que le Théorème de Riesz fournisse une fonction $\Delta\varphi \in L^2(M)$ vérifiant :

$$\forall f \in L^2(M), B(\varphi, f) = \langle f, \Delta\varphi \rangle. \quad (1.43)$$

La formule de Green (1.34), prolongée par continuité, montre que si $\varphi \in C^\infty(M)$, alors les notions de laplacien coïncident. Une fonction propre φ de Δ de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une fonction $\varphi \in D(\Delta)$ telle que $\Delta\varphi = \lambda\varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^2(M), \int_M g(\text{grad } f, \text{grad } \varphi) \, dV = \lambda \int_M f \varphi \, dV. \quad (1.44)$$

L'ellipticité du laplacien (voir le chapitre 8 de [34]) permet d'établir qu'alors φ est de classe C^∞ sur M . Cela implique qu'elle vérifie réellement $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ ponctuellement.

Supposons maintenant que M a un bord.

Si l'on choisit comme domaine de notre forme $D(B_D) = H_0^1(M)$, alors le domaine du laplacien obtenu, le *laplacien de Dirichlet* Δ_D , est une partie de $H_0^1(M)$, et donc les éléments $\varphi \in D(\Delta_D)$ vérifient $\varphi = 0$ sur le bord de M .

Si cette fois le domaine est $D(B_N) = H^1(M)$, alors pour $\varphi \in H^1(M)$, la formule de Green (1.35) prolongée par continuité montre que pour que $f \mapsto B(\varphi, f)$ soit continue, il faut que $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ sur le bord de M . Le laplacien obtenu, le *laplacien de Neumann* Δ_N , a donc un domaine dans lequel toutes les fonctions vérifient ces conditions.

Dans un cas comme dans l'autre, les conditions au bord de M permettent que la formule de Green (1.35) fassent coïncider les notions de laplacien pour les fonctions de $C^\infty(M)$, et que les fonctions propres de l'opérateur soient des solutions de l'équation ponctuelle $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ sur M ; dès lors, les fonctions propres de Δ_D sont des solutions du problème de Dirichlet, et celles de Δ_N de celui de Neumann.

1.2.3 Le cas du demi-plan de Poincaré

Cherchons des fonctions propres du laplacien sur \mathcal{H} . Pour cette discussion, nous ne les chercherons pas dans $L^2(\mathcal{H})$, mais plutôt directement des fonctions de classe C^∞ sur \mathcal{H} . L'ellipticité discutée plus tôt motive ce choix, ainsi que le fait que nous avons de bons systèmes de coordonnées sur \mathcal{H} qui permettront de faire des calculs de dérivées explicites.

Fonctions de y

Une première idée est de chercher des fonctions qui ne dépendent que de la partie imaginaire y de z . Dans ce cas, l'équation $\Delta f = \lambda f$ devient une équation différentielle ordinaire d'ordre 2, donc on peut s'attendre à un espace de solutions de dimension 2 :

Proposition 5. Soit $r \in \mathbb{C}$ et $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$. Alors,

- Si $\lambda \neq 1/4$, alors les fonctions $y^{\frac{1}{2}+ir}$ et $y^{\frac{1}{2}-ir}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de $\Delta f = \lambda f$.
- Si $\lambda = 1/4$, la même chose se produit avec les fonctions $y^{1/2}$ et $y^{1/2} \log y$.

Attention, il faut remarquer ici que les fonctions propres ici présentes n'appartiennent pas à $L^2(\mathcal{H})$, car elles n'ont pas les bonnes décroissances pour être intégrables sur \mathcal{H} . Nous discuterons du spectre du laplacien en tant qu'opérateur de $L^2(\mathcal{H})$ à la fin de cette section.

Fonctions radiales

Nous pouvons aussi rechercher des solutions propres *radiales*, c'est-à-dire des fonctions ne dépendant que de la distance à un point fixé, le *centre*. Voici une méthode pour en construire, en moyennant autour d'un point :

Définition 3. Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. La *radialisée* de f au point $z \in \mathcal{H}$ est définie par la formule suivante :

$$\forall w \in \mathcal{H}, f_z^{\text{rad}}(w) = \int_{S_z} f(M \cdot w) dM \quad (1.45)$$

où S_z est le stabilisateur de z pour l'action de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H} , qui est conjugué à $\text{SO}_2(\mathbb{R})$, et dM est la mesure de Haar normalisée dessus.

La radialisée de f est une fonction radiale de centre z , et qui vaut $f(z)$ en z . Le fait que le laplacien commute avec les isométries fait que si f est une fonction propre du laplacien, alors pour n'importe quel centre $z \in \mathcal{H}$, la fonction f_z^{rad} est une fonction propre du laplacien également. Couplée avec les exemples du paragraphe précédent, cette observation permet d'obtenir des familles de fonctions propres du laplacien :

Proposition 6. Soit $r \in \mathbb{C}$. Soit f_r la radialisée en i de la fonction $x + iy \mapsto y^{\frac{1}{2} + ir}$. Il s'agit d'une fonction propre de Δ , de valeur propre associée $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$. Dans les coordonnées polaires de centre i et de direction verticale, la fonction s'exprime comme étant $f_r(z) = F_r(d(i, z))$, où F_s s'écrit explicitement :

$$F_r(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(\cosh \rho + \sinh \rho \cos 2\theta)^{\frac{1}{2} + ir}}. \quad (1.46)$$

Pour $z \in \mathcal{H}$ fixé, la fonction $w \in \mathcal{H} \mapsto F_r(d(z, w))$ est l'unique fonction propre de Δ de valeur propre λ radiale de centre z et valant 1 en z .

Spectre de Δ sur \mathcal{H}

Pour le moment nous avons travaillé dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{H})$. Considérons maintenant le laplacien comme un opérateur non borné sur $L^2(\mathcal{H})$. Le spectre est alors l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'opérateur $\Delta - \lambda \text{id}$ n'est pas inversible d'inverse bornée.

Le spectre du laplacien est l'intervalle $[1/4, +\infty[$. La preuve de la borne inférieure découle du principe du min-max (le Théorème 12), et de l'inégalité établie dans l'introduction de [28] :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{H}), \frac{1}{4} \|f\|^2 \leq \langle f, \Delta f \rangle. \quad (1.47)$$

Le fait que les valeurs de $[1/4, +\infty[$ appartiennent au spectre s'établit en construisant des fonctions propres approchées à l'aide des fonctions propres exactes trouvées précédemment ; ceci permet de nier l'inversibilité de $\Delta - \lambda I$ pour $\lambda \geq 1/4$.

La valeur $1/4$ est très particulière pour toutes les surfaces hyperboliques, nous y reviendrons dans la section 1.3.4.

1.2.4 Opérateurs à noyau et transformée de Selberg

Opérateurs à noyaux sur \mathcal{H}

Pour le moment le seul opérateur que nous avons étudié sur \mathcal{H} est le laplacien. Voici une famille d'opérateurs intéressants, qui permettront d'étudier le spectre du laplacien :

Définition 4. Une fonction $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ paire de classe \mathcal{C}^∞ est appelée *noyau invariant* si elle vérifie la condition de décroissance suivante pour un certain $\delta > 0$ et $C > 0$:

$$\forall \rho \geq 0, |k(\rho)| \leq C e^{-\rho(1+\delta)}. \quad (1.48)$$

On lui associe une fonction \mathcal{C}^∞ de deux variables de \mathcal{H} , également notée par abus k :

$$\forall (z, w) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, k(z, w) := k(d(z, w)). \quad (1.49)$$

Ce noyau invariant définit un *opérateur intégral invariant* de domaine $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{H}) \subset L^2(\mathcal{H})$:

$$T_k : f \mapsto \int_{\mathcal{H}} k(\cdot, w) f(w) d\mu(w). \quad (1.50)$$

Cette façon de construire des opérateurs est très pratique, car elle nous permet d'obtenir un grand nombre d'opérateurs, qui auront des propriétés faciles à déterminer relativement à k . Dans le cas où le noyau invariant $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est à support compact, il vérifie automatiquement la condition de décroissance (1.48). Ces exemples fondamentaux sont souvent suffisants pour ce que l'on cherche à faire.

Les relations entre opérateurs intégraux invariants et l'étude du spectre du laplacien s'explicitent à travers le résultat suivant, qui découle de l'invariance du laplacien par isométrie et de la formule de Green :

Théorème 7 ([3]). Soit k un noyau invariant.

- T_k commute avec le laplacien.
- Il existe une fonction $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, si f est une fonction propre de Δ sur \mathcal{H} de valeur propre $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$, alors c'est également une fonction propre de T_k de valeur propre $h(r)$.
La fonction h s'exprime explicitement de la manière suivante :

$$h(r) = \int_{\mathcal{H}} k(z, w) F_r(d(z, w)) d\mu(w), \quad (1.51)$$

où F_r est définie dans la Proposition 6.

Des manipulations de la formule (1.51) mènent à la proposition suivante :

Proposition 8 ([3]). La fonction h est la *transformée de Selberg*⁶ associée au noyau k . Elle peut être calculée comme la transformée de Fourier de la fonction g définie par :

$$g(u) = \sqrt{2} \int_{|u|}^{+\infty} \frac{k(\rho) \sinh \rho}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho. \quad (1.52)$$

Cette transformation peut s'inverser, car le noyau k s'exprime à l'aide de la transformée de Fourier g de h de la manière suivante :

$$k(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\rho}^{+\infty} \frac{g'(u)}{\sqrt{\cosh u - \cosh \rho}} du. \quad (1.53)$$

Les noyaux de la chaleur

Une autre famille de noyaux qui sont très utiles sont les *noyaux de la chaleur*. À tout instant $t > 0$, par la proposition d'inversion 8, on définit p_t comme étant le noyau invariant associé à la transformée de Selberg

$$h_t : r \mapsto \exp \left[-t \left(\frac{1}{4} + r^2 \right) \right]. \quad (1.54)$$

La raison pour laquelle ces noyaux sont appelés ainsi est qu'ils sont des *solutions fondamentales de l'équation de la chaleur*, c'est-à-dire qu'ils vérifient :

6. La transformation de Selberg est une fonction $\mathcal{S}(f)$ associée à une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ par une formule intégrale (voir [3]). Ici, la fonction f est $z \mapsto k(i, z)$.

Proposition 9. La fonction $p : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, de classe \mathcal{C}^2 en les deux premières variables, et \mathcal{C}^1 en la troisième, et vérifie :

1. $\frac{\partial p}{\partial t} = -\Delta_z p$.
2. $p(z, w, t) = p(w, z, t)$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{H}} p(z, w, t) f(w) d\mu(w) = f(z)$ uniformément sur tout compact en z , pour toute fonction f continue à support compact.

Ceci implique que pour toute condition initiale $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ continue à support compact, la fonction $g(z, t) := T_{p_t} f(z)$ est solution au problème de la chaleur :

$$\begin{cases} \Delta_z g + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \\ g(z, t = 0) = f(z). \end{cases} \quad (1.55)$$

La fonction $z \mapsto g(z, t)$ correspond au profil de température, après avoir laissé se propager pendant une durée t la condition initiale f . Une bonne manipulation des formules d'inversions permet d'établir la décroissance spatiale de p_t :

Proposition 10 ([3]). Il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $\rho > 0$,

$$0 \leq p_t(\rho) \leq C \frac{e^{-t/4 - \rho^2/8t}}{t}. \quad (1.56)$$

Cas d'une surface compacte

Les résultats que nous souhaitons établir à l'aide des opérateurs intégraux invariants, comme le théorème spectral et la formule des traces de Selberg (voir la section 1.3), sont vérifiés dans le cas où la surface étudiée est compacte. Nous décrivons ici une famille d'opérateurs sur une surface hyperbolique compacte $X = \mathcal{H}/\Gamma$, dont D est un domaine fondamental de frontière de mesure nulle.

Les fonctions de $L^2(X)$ peuvent être réalisées comme des fonctions mesurables $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ et Γ -invariantes :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathcal{H}, f(\gamma \cdot z) = f(z). \quad (1.57)$$

Elles n'appartiennent néanmoins pas nécessairement à $L^2(\mathcal{H})$.

Définition 5 ([3]). Soit k un noyau invariant sur \mathcal{H} . On lui associe un *noyau automorphe* K , défini par la série :

$$K(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma \cdot w), \quad (1.58)$$

Ce noyau définit un opérateur intégral invariant sur $L^2(X)$, par la formule suivante :

$$T_k f(z) = \int_D K(z, w) f(w) dw. \quad (1.59)$$

Cette définition coïncide avec la définition de T_k pour les fonctions Γ -invariantes de $L^2(\mathcal{H})$. La convergence de la série (1.58) et la bonne définition de l'opérateur proviennent de la condition de décroissance (1.48), et des estimations pour $m \rightarrow +\infty$ issues de [3] :

$$\forall z \in D, \#\{\gamma \in \Gamma : m \leq d(z, \gamma z) < m + 1\} = O(e^m). \quad (1.60)$$

1.3 Étude du spectre d'une surface hyperbolique compacte

Soit X une surface hyperbolique. Le laplacien étant un opérateur essentiellement autoadjoint sur $L^2(X)$, ses valeurs propres sont réelles, et ses espaces propres orthogonaux. De plus, 0 est une valeur propre de Neumann si et seulement si X est d'aire finie, et dans ce cas l'espace propre est l'ensemble des fonctions constantes. Ce n'est pas une valeur propre de Dirichlet.

Cette section présente les résultats plus précis, propres au laplacien, qui motivent l'étude de son spectre.

1.3.1 Théorème spectral

Soit X une surface hyperbolique compacte. Les opérateurs T_K , où $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ est un élément de $L^2(X \times X)$, sont ce que l'on appelle des *opérateurs de Hilbert-Schmidt* [6]. Sur l'espace séparable $L^2(X)$, ces opérateurs sont compacts. Si K est symétrique et à valeurs réelles, alors T_K est autoadjoint. Par conséquent, le théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints est vérifié par T_K . Nos opérateurs automorphes nous fournissent donc une famille d'opérateurs commutant avec le laplacien, et pour lesquels $L^2(X)$ admet une famille orthonormée dense de fonctions propres. Ceci nous permet d'établir le résultat suivant, essentiel à notre étude :

Théorème 11 (Théorème spectral [3]). Soit X une surface hyperbolique compacte. Le problème spectral $\Delta\varphi = \lambda\varphi$ admet un système orthonormé complet $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions propres C^∞ dans $L^2(X)$ de valeurs propres correspondantes $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, vérifiant :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (1.61)$$

1.3.2 Principe du min-max et inégalités de Cheeger

Une réécriture de cette décomposition spectrale est le principe du min-max, qui est une description variationnelle du spectre du laplacien :

Théorème 12 ([12]). Soit X une surface hyperbolique compacte, et $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée de ses valeurs propres. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout sous-espace vectoriel E de dimension $k - 1$ de $H^1(X)$,

$$\lambda_k \geq \inf \left\{ \frac{B(f, f)}{\|f\|^2}, f \in E^\perp \right\}. \quad (1.62)$$

L'égalité est atteinte en prenant E engendré par une famille orthogonale de fonctions propres, associées aux $k - 1$ premières valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket}$.

Ceci permet d'établir des liens entre le spectre du laplacien sur la surface entière, et sur des parties de celle-ci :

Corollaire 13 ([12]). Soit X une surface hyperbolique compacte, N un entier et $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ des domaines normaux⁷ disjoints de X . Notons $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée des valeurs propres du laplacien sur X .

- Si $(\nu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la réunion ordonnée (avec multiplicité) des valeurs propres du laplacien de Dirichlet sur les domaines $\Omega_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lambda_j \leq \nu_j. \quad (1.63)$$

- Si de plus $X = \bigcup_{i=1}^N \overline{\Omega}_i$, et $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est la réunion ordonnée (avec multiplicité) des valeurs propres du laplacien de Neumann sur les domaines $\Omega_i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, alors,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \mu_j \leq \lambda_j. \quad (1.64)$$

Ce genre de résultat nous permet de trouver un lien entre des propriétés spectrales et géométriques de la surface. Par exemple, une quantité géométrique intéressante est :

Définition 6. La *constante de Cheeger* d'une surface hyperbolique compacte X est définie comme étant :

$$h(X) = \min \left\{ \frac{\sum_{j=1}^N \ell(\gamma_j)}{\min(\mu(A), \mu(B))} \right\} \quad (1.65)$$

où $(\gamma_j)_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est une famille de lacets simples sur X , telles que la surface X coupée le long de ces lacets a deux composantes connexes A et B .

⁷. Un *domaine normal* d'une surface hyperbolique X est un ouvert connexe relativement compact à bord C^∞ par morceaux de X .

Elle décrit la possibilité de découper la surface en deux composantes connexes de grande masse, en coupant peu de longueur. Elle est liée au spectre du laplacien de la manière suivante :

Théorème 14 (Inégalité de Cheeger). Il existe une constante $C > 0$ telle que, si $h := h(X)$,

$$\frac{h^2}{4} \leq \lambda_1(X) \leq C(h + h^2). \quad (1.66)$$

1.3.3 Formule des traces de Selberg

La formule des traces de Selberg est un équivalent de la formule sommatoire de Poisson. Elle établit un lien entre les valeurs d'une fonction test appliquée au spectre du laplacien, et les valeurs de sa transformée de Fourier appliquée à son spectre des longueurs.

Théorème 15 (Formule des traces [3, 21]). Soit $X = \mathcal{H}/\Gamma$ une surface hyperbolique compacte. Notons $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres ordonnées du laplacien sur X ; pour $j \in \mathbb{N}$ considérons un complexe r_j tel que $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$.

Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

1. h est analytique sur la bande $\mathfrak{B}_\sigma = \{|\operatorname{Im} z| \leq \sigma\}$ pour un $\sigma > 1/2$;
2. h est paire⁸ ;
3. Il existe $\delta > 0$, $C > 0$ tel que pour tout z dans \mathfrak{B}_σ , $|h(z)| \leq C(1 + |\operatorname{Re} z|)^{-2-\delta}$.

Alors, si g est la transformée de Fourier de h ,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h(r_j) = \frac{\mu(X)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h(\rho) \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\operatorname{id}\}} \frac{\Lambda(\gamma)}{2 \cosh(\ell(\gamma)/2)} g(\ell(\gamma)), \quad (1.67)$$

où $\ell(\gamma)$ est la longueur de γ , et $\Lambda(\gamma)$ la longueur de la géodésique primitive associée à γ (voir la Définition 2).

Ce résultat découle du lemme suivant, qui constitue en soi un résultat utile :

Lemme 16 (Formule de la prétrace [3]). Sous les hypothèses du Théorème 15, si $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de fonctions propres de Δ sur $X = \mathcal{H}/\Gamma$, et k est le noyau invariant associé à h ,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h(r_j) |\psi_j(z)|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h(\rho) \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\operatorname{id}\}} k(d(z, \gamma \cdot z)) \quad (1.68)$$

La formule des traces de Selberg, appliqué aux noyaux de la chaleur, permet d'établir :

Théorème 17 (Huber [9]). Des surfaces hyperboliques compactes de même genre ont le même spectre des longueurs si et seulement si leurs laplaciens ont le même spectre.

Néanmoins, le spectre du laplacien ne détermine pas la surface hyperbolique à isométrie près (d'après le théorème de Sunada, présenté dans le chapitre 11 de [9]).

1.3.4 Position du spectre par rapport à la valeur 1/4

En comparaison avec le spectre du laplacien sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} , le revêtement universel des surfaces hyperboliques, nous allons distinguer les *petites valeurs propres*, c'est-à-dire les valeurs propres de Δ strictement inférieures à 1/4, et les autres.

Il a d'abord été conjecturé par McKean que de telles valeurs propres n'existaient pas, ce qui a été invalidé par une construction explicite de Randol [33] à l'aide de la formule des traces.

8. On dit que $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est *paire* si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h(-z) = h(z)$.

La valeur $1/4$ est très particulière. En effet, le nombre de petites valeurs propres d'une surface hyperbolique de genre g est majoré par une constante c_g . Schmutz [35] démontre que $c_g = 4g - 3$ convient, et conjecture que $c_g = 2g - 2$ aussi note : ceci a été démontré en 2009 par Otal et Rosas. Cette valeur de c_g est motivée par le fait que c'est la meilleure que le raisonnement de Schmutz peut produire ; il n'y a pas de borne inférieure la réalisant à notre connaissance.

Cette majoration en fonction du genre n'est pas possible pour de plus grandes valeurs propres : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout genre $g \geq 2$, il existe des surface de genre g ayant un nombre arbitrairement grand de valeurs propres plus petites que $1/4 + \varepsilon$ [9].

D'un autre point de vue, une application classique de la formule des traces de Selberg, le Théorème des géodésiques premières (9.6.1 dans [9]), montre que le comportement asymptotique du spectre des longueurs d'une surface est principalement influencé par ses petites valeurs propres.

La conjecture de Selberg affirme que les surfaces de congruence, définies comme étant le quotient de \mathcal{H} par le groupe

$$\Gamma(n) = \{M \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : M \equiv I_2 \pmod{n}\}, \quad (1.69)$$

n'ont pas de petite valeur propre non triviale. Des résultats intermédiaires dans ce sens ont été établis et sont présentés dans [3]. Cette conjecture est au cœur des applications arithmétiques de la théorie spectrale des surfaces hyperboliques.

Chapitre 2

Théorie spectrale des graphes finis réguliers, et approche probabiliste

L'étude du spectre des graphes finis est, en plusieurs aspects, très similaire à celle du spectre des surfaces hyperboliques. Les résultats fondamentaux de le chapitre précédent ont tous des équivalents pour les graphes, avec l'avantage indéniable que les opérateurs que nous diagonalisons ici sont de dimension finie, et donc beaucoup plus simples.

Les probabilités peuvent interagir de différentes manières avec un graphe : marches aléatoires sur le graphe, revêtement aléatoire d'un graphe fixé, choix d'un graphe de manière uniforme parmi l'ensemble des graphes... Certains de ces points de vue ont mené récemment à des résultats concernant le spectre des graphes finis réguliers : l'existence des graphes de Ramanujan [24], le cutoff de la marche aléatoire sur ceux-ci [22], la conjecture d'Alon-Friedman [14, 5].

Je présente ici ces résultats, en espérant à la fois rendre claire la correspondance avec les propriétés énoncées dans le chapitre 1, et mettre en place de nombreuses pistes à explorer et à appliquer aux surfaces hyperboliques dans le chapitre 3.

2.1 Matrice d'adjacence et laplacienne

2.1.1 Définitions et notations

Graphe, degré, régularité

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini. V est l'ensemble de ses n sommets, et E l'ensemble de ses arêtes. Sauf précision contraire, les graphes seront supposés simples¹, et non orientés. Pour des sommets x et y , notons $x \sim y$ lorsque x et y sont reliés par une arête. Pour un sommet x , le *degré* de x est le nombre $\deg x$ d'arêtes passant par x . Le graphe G est d -régulier si tous ses sommets sont de degré d . Dans ce cas, la relation $2\#E = nd$ impose des conditions sur les paramètres du graphe (notamment, n et d ne peuvent pas être tous les deux impairs). On note $\mathcal{G}_d(n)$ l'ensemble des graphes d -réguliers indexés par $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Un *cycle* de longueur k dans un graphe est une suite de sommets x_1, \dots, x_k tels que pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $x_i \sim x_{i+1}$, et $x_k \sim x_1$. Un graphe est un *arbre* s'il ne contient pas de cycle.

1. Un graphe est *simple* s'il ne contient ni arête multiple, ni arête qui est une boucle.

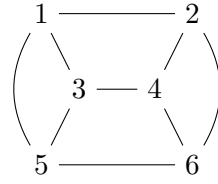


FIGURE 2.1 – Un graphe 3-régulier à 6 sommets et 9 arêtes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2.2 – La matrice d'adjacence et laplacienne du graphe de la Figure 2.1.

Adjacence

L'opérateur d'adjacence agit sur l'ensemble des fonctions de V dans \mathbb{R} , noté \mathcal{F}_V , de la manière suivante :

$$\mathcal{A} \cdot f : x \in V \mapsto \sum_{x \sim y} f(y) \quad (2.1)$$

Il s'agit d'un opérateur linéaire sur \mathcal{F}_V , qui est un espace vectoriel de dimension n . Une fois une numérotation des sommets fixée, \mathcal{A} se représente dans la base associée par une matrice A appelée *matrice d'adjacence*.

Laplacien

Le *laplacien* \mathcal{L} est également un opérateur linéaire sur \mathcal{F}_V , qui est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{L} \cdot f : x \in V \mapsto \sum_{x \sim y} (f(x) - f(y)). \quad (2.2)$$

De la même manière, il se représente matriciellement par la *matrice laplacienne* Δ . Cette matrice s'écrit également tCC , où C est la matrice dont les lignes sont indexées par les arêtes, les colonnes par les sommets numérotés $\llbracket 1, n \rrbracket$, et telle que si $e = (j, k)$, et $j < k$, alors $c_{e,j} = 1$ et $c_{e,k} = -1$, et tous les autres coefficients sont nuls. La matrice laplacienne est donc symétrique positive.

Matrice des degrés, cas régulier

La somme de ces matrices est la *matrice des degrés* D , qui est une matrice diagonale ayant comme coefficients diagonaux les degrés des sommets. Ceci se remarque très bien sur l'exemple 2.2. Dans ce cas où le graphe est régulier, cette matrice est dI_n , et donc :

$$\Delta + A = dI_n. \quad (2.3)$$

Par conséquent, il est équivalent d'étudier le spectre du laplacien et de la matrice d'adjacence. Cette dernière étant plus simple, nous nous en contenterons par la suite, et toute référence au *spectre* d'un graphe correspondra au spectre de sa matrice d'adjacence. Néanmoins, il arrive que la matrice laplacienne soit plus simple pour certains calculs, et il ne faut pas hésiter à l'utiliser.

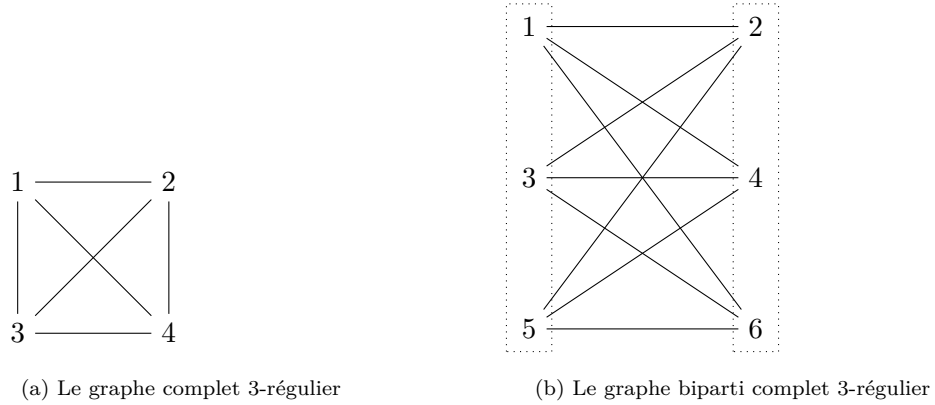


FIGURE 2.3 – Deux graphes 3-réguliers particuliers

Distance et diamètre

Un *chemin* de longueur k sur le graphe est une liste ordonnée de sommets qui sont successivement voisins l'un de l'autre. Le nombre de chemins de longueur k reliant des sommets i et j est le coefficient (i, j) de la matrice A^k . Le graphe est *connexe* si tous ses sommets sont reliés par un chemin. Sauf mention contraire, les graphes de ce mémoire sont supposés connexes.

La *distance* entre i et j est le plus court chemin qui les relie ; ceci définit une distance sur V , et toutes les quantités associées (les boules, notées $B_G(x, R)$, le diamètre ...). Pour un graphe d -régulier, une boule de rayon k contient au plus $1 + d + d^2 + \dots + d^k \leq d^{k+1}$ sommets, donc le diamètre est au moins $c_d \log n$, où c_d est une constante positive.

Le *rayon d'injectivité* en un sommet $x \in V$ est le plus grand entier k tel que la boule de centre x et de rayon k est un arbre, il est noté $\rho_G(x)$. Le rayon d'injectivité global est le minimum de ces rayons d'injectivité locaux.

2.1.2 Spectre d'un graphe d -régulier

Dans toute la suite, nous considérons un graphe $G = (V, E)$ à n sommets et d -régulier.

Spectre de la matrice d'adjacence

La matrice A est symétrique réelle, et elle est donc diagonalisable dans \mathbb{R} , et nous pouvons ordonner ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1. \quad (2.4)$$

Les valeurs propres du laplacien sont alors :

$$d - \lambda_1 \leq \dots \leq d - \lambda_n. \quad (2.5)$$

Comme la matrice $D^{-1}A = \frac{1}{d}A$ est stochastique, le vecteur constitué uniquement de 1 est un vecteur propre associé à la valeur propre d , qui est de multiplicité 1, et les valeurs propres appartiennent toutes au segment $[-d, d]$. Le réel $-d$ est une valeur propre si et seulement si le graphe est *biparti*, c'est-à-dire si l'ensemble de ses sommets peut se partitionner en deux sous-ensembles U_1 et U_2 tels que toutes les arêtes aient une extrémité dans U_1 et l'autre dans U_2 . Ces valeurs propres (éventuelles) sont appelées *valeurs propres triviales*.

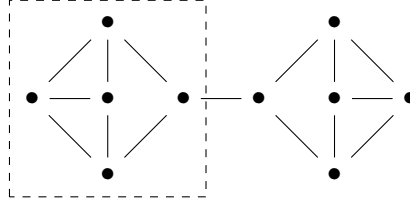


FIGURE 2.4 – Un graphe avec une petite constante de Cheeger ($1/5$, le minimum étant obtenu pour la partie entourée en pointillés).

Deuxième valeur propre et trou spectral

La plus grande valeur propre non triviale, λ_2 est appelée *deuxième valeur propre* du graphe. Le plus grand module de valeur propre non trivial est noté λ^+ :

$$\lambda^+ = \max\{|\lambda_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |\lambda_i| < d\}. \quad (2.6)$$

Le *trou spectral* est défini comme étant $d - \lambda^+$, c'est-à-dire la distance entre le spectre trivial et le spectre non trivial. Les quantités $d - \lambda^+$ et $d - \lambda_2$ sont liées très fortement à des caractéristiques du graphe, que nous détaillerons par la suite.

Voici l'exemple du cas des deux graphes d -réguliers les plus simples :

- Le graphe d -régulier complet est le graphe à $d+1$ sommets, qui sont tous reliés par une arête. La matrice A est alors $J_{d+1} - I_{d+1}$, où J_{d+1} est la matrice de taille $d+1$ constituée intégralement de 1. Son spectre est $\{-1, d\}$, et son trou spectral $d - 1$.
- Le graphe d -régulier biparti est composé de $2d$ sommets, partagés en deux parties U_1 et U_2 de d sommets. Tous les sommets de U_1 sont reliés à tous les sommets de U_2 . Sa matrice d'adjacence est la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} (0) & J_d \\ J_d & (0) \end{pmatrix}$. Son spectre est $\{-d, 0, d\}$, et son trou spectral d .

Constante de Cheeger et inégalité de Cheeger

Définition 7. La *constante de Cheeger* d'un graphe G est définie comme étant :

$$h(G) = \min_U \frac{\#\partial U}{\#U}, \quad (2.7)$$

où le minimum est pris parmi les parties non vides $U \subset V$ contenant moins de la moitié des sommets de G . ∂U est le bord de U , c'est-à-dire l'ensemble des arêtes de G ayant une extrémité dans U et l'autre hors de U .

La constante de Cheeger est liée au trou spectral par le biais des inégalités de Cheeger :

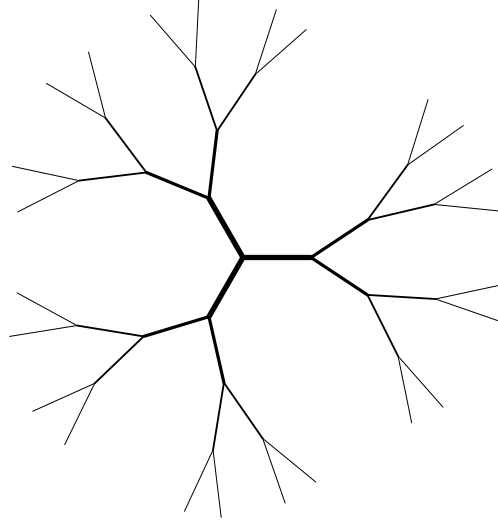
$$\frac{1}{2}(d - \lambda_2) \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}. \quad (2.8)$$

Ainsi, un graphe ayant un gros trou spectral aura également une grande constante de Cheeger, ce qui indique qu'il sera bien connecté, et sans « goulot d'étranglement » comme celui de la Figure 2.4. La notion de bonne connexion est particulièrement importante en théorie des réseaux informatiques.

La constante de Cheeger d'une surface hyperbolique de genre g peut être encadrée par celles des graphes 3-réguliers à $2g - 2$ sommets, grâce à des découpages en pantalons et en triangles de la surface ; voir [8].

Marche aléatoire

La *marche aléatoire* sur le graphe G est un processus qui consiste à partir d'un état initial x , qui est un sommet du graphe, et à chaque instant, choisir de manière uniforme et indépendante un voisin du

FIGURE 2.5 – Une boule de rayon 4 dans l’arbre infini 3-régulier \mathbb{T}_3 .

sommet où l’on se trouve, et s’y rendre. C’est une chaîne de Markov d’espace d’états V et de matrice de transition $D^{-1}A$. Pour tout instant $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}^k(x, \cdot)$ correspond à la répartition à l’instant k avec la condition initiale $x \in V$. Cette probabilité vérifie pour tout événement $U \subset V$:

$$\mathbb{P}^{k+1}(x, U) = \frac{1}{\deg x} \sum_{x \sim y} \mathbb{P}^k(y, U). \quad (2.9)$$

Une probabilité π sur V est dite *stationnaire* si elle est conservée par le processus. Ceci implique, en vertu de la formule précédente, le fait d’être un vecteur propre de la matrice ${}^t(D^{-1}A)$ associé à la valeur propre 1.

Dans le cas d’un graphe d -régulier, $D = dI_n$, donc les probabilités stationnaires sont des vecteurs propres de la matrice d’adjacence, associés à la valeur propre d . La probabilité uniforme sur V , notée π , en est une, comme le degré est uniforme.

Le vocabulaire usuel des chaînes de Markov s’utilise directement (on parle de graphe récurrent ou transient, de temps de retour à un sommet . . .). Certains résultats spectraux ont des conséquences sur la marche aléatoire (comme le phénomène de cutoff présenté en section 2.2.2), et inversement ce point de vue permet d’établir des résultats spectraux (le théorème d’Alon-Friedman en est un exemple, voir la section 2.2.4).

2.2 Graphes de Ramanujan

2.2.1 Définition et théorème d’Alon-Boppana

Définition 8. Un *graphe de Ramanujan* est un graphe fini d -régulier dont toutes les valeurs propres λ sont $\pm d$ ou vérifient $|\lambda| \leq 2\sqrt{d-1}$; autrement dit, un graphe tel que $\lambda^+ \leq 2\sqrt{d-1}$.

Le choix de la valeur $2\sqrt{d-1}$ n’est pas anodin. Il est d’une part notable que l’arbre infini d -régulier \mathbb{T}_d a pour spectre le segment $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$. Il s’agit du revêtement universel de tous les graphes d -réguliers (voir la Figure 2.5), au même titre que le plan hyperbolique de spectre $[1/4, +\infty[$ est le revêtement universel de toutes les surfaces hyperboliques sans bord (voir la section 1.1.2).

Cette valeur est rendue particulière par le résultat suivant d'Alon, qui montre que pour n'importe quelle valeur plus petite, il ne pourrait pas exister de graphe de Ramanujan de taille arbitrairement grande. Les graphes de Ramanujan sont en ce sens les graphes ayant le trou spectral le plus grand possible asymptotiquement.

Proposition 18 (Alon-Boppana [32]). Soit $G = (V, E)$ un graphe fini d -régulier, et qui est de diamètre $2k$. Alors, la valeur propre λ_2 vérifie :

$$\lambda_2 \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{2\sqrt{d-1}-1}{k}. \quad (2.10)$$

Par conséquent, il existe une constante c_d telle que pour tout graphe d -régulier à n sommets,

$$\lambda_2 \geq 2\sqrt{d-1} - \frac{c_d}{\log n}. \quad (2.11)$$

La preuve de [32] provient de l'utilisation du principe du min-max : Alon construit une bonne fonction propre f , orthogonale à la fonction constante (qui est le vecteur propre associé à la valeur propre d), et utilise le fait qu'alors $\lambda_2 \geq \langle \Delta f, f \rangle / \|f\|^2$. Cette méthode a l'avantage de ne pas être limitée au cas de la dimension finie (et donc les graphes), de nombreuses propriétés spectrales sur les surfaces pouvant se démontrer ainsi (voir la section 1.3.2).

Cette proposition indique que les cas particuliers du graphe régulier et biparti vus précédemment, qui ont des trous spectraux d'à peu près d , sont des exceptions permises par leur faible nombre de sommets.

Les graphes ayant un gros trou spectral (dans nécessairement être optimal comme les graphes de Ramanujan) sont appelés des *expandeurs*. Ils vérifient de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles, par exemple pour des applications informatiques (voir [18]).

2.2.2 Cutoff de la marche aléatoire sur des graphes de Ramanujan

Un exemple de telle application se trouve dans l'article de Lubetzky et Peres [22], qui établit qu'il existe un phénomène de *cutoff* pour la marche aléatoire sur les graphes de Ramanujan d -réguliers. Cela signifie que, quelque soit l'état auquel la marche aléatoire est initialisée, sa répartition $\mathbb{P}^t(x, \cdot)$ devient très soudainement presque uniforme à un instant t_* appelé *temps de mélange* (et qui dépend de la taille du graphe). Par conséquent, le graphe « mélange bien », étant donné qu'en temps fini la marche aléatoire initialisée en un point est presque uniformément répartie. Quantitativement, le théorème s'énonce ainsi :

Théorème 19 ([22]). Soit G un graphe de Ramanujan d -régulier non biparti à n sommets. Considérons le temps $t_*(n) = \frac{d}{d-2} \log_{d-1} n$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ fixé, la marche aléatoire sur G vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_{TV} \left(t_*(n) + s\sqrt{\log_{d-1} n} \right) = \mathbb{P}(Z > c_d s), \quad (2.12)$$

où Z est la loi normale centrée standard, et $c_d = \frac{(d-2)^{3/2}}{2\sqrt{d(d-1)}}$.

La quantité D_{TV} est définie par :

$$D_{TV}(t) = \max_{x \in V} \max_{U \subset V} \left| \mathbb{P}^t(x, U) - \pi(U) \right|. \quad (2.13)$$

et représente la plus grande distance *en variation totale* entre les répartitions à l'instant t initialisées en $x \in G$, et la distribution uniforme π .

Les auteurs établissent également que, asymptotiquement pour n grand, les graphes d -réguliers de taille n mélangeant le plus vite sont les graphes de Ramanujan non bipartis. Ces résultats ont des conséquences plus géométriques sur le graphe en lui-même, en particulier sur la distance entre ses sommets :

Corollaire 20 ([22]). Soit G un graphe de Ramanujan d -régulier non biparti à n sommets. Alors, pour tout sommet x ,

$$\#\{y \in V : |d(x, y) - \log_{d-1}(n)| > 3 \log_{d-1}(\log n)\} = o(n), \quad (2.14)$$

ou autrement dit, quand n devient grand, une proportion s'approchant de 1 des sommets de G est à la distance $\log_{d-1}(n)$ de x à $3 \log_{d-1}(\log n)$ près.

2.2.3 Existence des graphes de Ramanujan

Les résultats d'existence

Si l'on connaît quelques graphes de Ramanujan de petite taille, comme le graphe complet ou le graphe biparti complet, il est beaucoup plus difficile d'en trouver de taille arbitrairement grande. Lubotzky, Phillips, Sarnak et Margulis [23, 25] exhibent en 1988 des familles infinies de graphes de Ramanujan $(p+1)$ -réguliers pour tout nombre premier p congrus à 1 modulo 4. Certains de ces graphes sont bipartis et d'autres non, selon un critère simple². Ces graphes sont construits explicitement comme graphes de Cayley de groupes de matrices. C'est a priori le seul cas de figure où l'on connaît des graphes de Ramanujan de taille arbitrairement grande. Il faut ensuite attendre 2013 pour que Marcus, Spielman, Srivastava établissent le résultat suivant :

Théorème 21 ([24]). Pour tout $d \geq 3$, il existe une suite infinie de graphes de Ramanujan bipartis d -réguliers.

Il est notable que les graphes obtenus dans ce Théorème sont bipartis. Selon les applications, cela peut être une bonne ou mauvaise nouvelle (par exemple, le Théorème 19 demande des graphes non bipartis, mais il y a d'autres applications de [18] qui restent valables, voire qui exigent d'être biparti).

Revêtements de graphes, et spectre

Pour prouver le Théorème 21, l'idée est de partir d'un graphe de Ramanujan connu, le biparti complet, et d'obtenir un graphe plus grand par un revêtement. Plus précisément, si G est un graphe, un revêtement à 2 feuilles de G est construit de la manière suivante :

- À chaque sommet x de G on associe deux sommets x_1 et x_2 de \tilde{G}_s .
- On choisit un ensemble de signes $s \in \{\pm 1\}^E$.
- Pour chaque arête $x \sim y$ de G ,
 - ★ Si $s_{x \sim y} = +1$ alors $x_1 \sim y_1$ et $x_2 \sim y_2$ dans \tilde{G} .
 - ★ Si $s_{x \sim y} = -1$ alors $x_1 \sim y_2$ et $x_2 \sim y_1$ dans \tilde{G} .

Si G est d -régulier, alors \tilde{G}_s aussi; pareillement pour le caractère biparti. Le graphe possède une involution \tilde{S} , qui consiste à échanger x_1 et x_2 pour tout sommet x de G . Comme cette opération conserve les arêtes, la matrice \tilde{S} commute avec la matrice d'adjacence \tilde{A} de \tilde{G}_s . Ceci permet de décomposer les espaces propres dans les deux espaces supplémentaires $\text{Ker}(\tilde{S} + \tilde{I})$ et $\text{Ker}(\tilde{S} - \tilde{I})$, et d'aboutir à la décomposition spectrale suivante :

- Il y a les vecteurs propres appartenant à $\text{Ker}(\tilde{S} - \tilde{I})$, qui sont invariants par l'action de \tilde{S} , et correspondent donc à des vecteurs propres de A de même valeur propre.
- Il y a ceux appartenant à $\text{Ker}(\tilde{S} + \tilde{I})$, qui sont « impairs » pour l'action de \tilde{S} . Ceux-ci correspondent à des vecteurs propres de la *matrice d'adjacence signée* du revêtement A_s , obtenue en mettant dans la case (x, y) le nombre $s_{x,y}$ si $x \sim y$ et 0 sinon.

Dès lors, le spectre de \tilde{A} est l'union avec multiplicité des spectres de A et A_s . Si le graphe G est de Ramanujan, alors il faut et suffit pour que le graphe \tilde{G}_s le soit que les valeurs propres de la matrice signée A_s soient dans le segment $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$ ou $\pm d$. Il suffit alors de démontrer le lemme suivant pour établir l'existence de graphes de Ramanujan bipartis arbitrairement grands :

2. Les graphes sont indexés par un nombre premier $q \neq p$ congrus à 1 modulo 4. Ils sont bipartis si et seulement si p est un carré dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Lemme 22. Soit G un graphe biparti d -régulier de Ramanujan. Il existe un ensemble de signe $s \in \{\pm 1\}^E$ tel que la plus grande valeur propre de A_s est inférieure ou égale à $2\sqrt{d-1}$.

En effet, \tilde{G}_s étant alors biparti, son spectre est symétrique autour de 0, donc la condition du lemme suffit pour démontrer qu'il est de Ramanujan. Comme d n'est pas valeur propre de A_s , elle est valeur propre simple de \tilde{A} , donc \tilde{G}_s est connexe. On peut alors itérer le lemme.

Revêtement aléatoire et polynôme de couplage

L'idée clé du lemme consiste à munir l'ensemble $\{\pm 1\}^E$ de la probabilité uniforme. Pour cette mesure de probabilité,

$$\mathbb{E}_{s \in \{\pm 1\}^E} [\chi_s(X)] = \mu_G(X), \quad (2.15)$$

où $\chi_s(X)$ est le polynôme caractéristique de A_s et $\mu_G(X)$ est le *polynôme de couplage* du graphe G , s'écrivant $\sum_{i \geq 0} (-1)^i m_i X^{n-2i}$, m_i étant le nombre de parties de E à i éléments ne partageant pas de sommets.

Le polynôme de couplage a de très bonnes propriétés (voir [17]) : toutes ses racines sont réelles, et inférieures à $2\sqrt{d-1}$. L'équation (2.15) l'exprime comme combinaison linéaire de nos polynômes caractéristiques des matrices signées. Le fait que ces polynômes soient *entrelacés* (voir [24]) permet alors de montrer qu'au moins un des termes de la somme a sa plus grande racine sous la plus grande racine de $\mu_G(X)$, et donc le résultat du lemme.

Ainsi, le résultat de Marcus, Spielman, Srivastava ne donne pas une construction explicite de graphes de Ramanujan, mais dit seulement qu'un des revêtements aléatoires d'un graphe de Ramanujan sera de Ramanujan, grâce à la relation probabiliste (2.15). Il permet de trouver de grands graphes de Ramanujan en parcourant tous les revêtements possibles, mais cela n'est pas efficace.

2.2.4 Probabilité qu'un graphe soit *presque* de Ramanujan

Une conjecture formulée par Alon affirme qu'avec grande probabilité, les graphes d -réguliers sont *presque* de Ramanujan. Elle est formulée plus précisément dans ce théorème, démontré d'abord par Friedman en 2008 puis plus récemment par Bordenave en 2015 :

Théorème 23 (Friedman [14] - Bordenave [5]). Munissons $\mathcal{G}_d(n)$ d'une probabilité uniforme \mathbb{P} . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ nd \text{ pair}}} \mathbb{P}(\lambda^+ \geq 2\sqrt{d-1} + \varepsilon) = 0. \quad (2.16)$$

La preuve de ce théorème dépend de l'hypothèse de *tangle-free*, qui demande que les chemins de longueur inférieure à $\ell = \kappa \log_{d-1}(n)$, où $\kappa < 1/4$, contiennent au plus un cycle. Bordenave établit que cela est vrai avec grande probabilité.

2.3 Convergence de Benjamini-Schramm vers \mathbb{T}_d

La notion de convergence de Benjamini-Schramm permet de donner un sens à la distribution limite d'une suite de graphes dont la taille tend vers $+\infty$. Elle a été introduite dans [2], afin d'étudier la dichotomie récurrence / transience de telles limites, avec comme motivation l'étude des triangulations aléatoires de la sphère.

Ici, nous nous plaçons dans un cas restreint, celui de graphes d -réguliers convergeant vers l'arbre infini d -régulier. Dans ce cas, la notion de convergence de Benjamini-Schramm a une caractérisation simple qui s'exprime de la sorte :

Définition 9. Soit $G_N = (V_N, E_N)$ un graphe d -régulier à N sommets. La suite $(G_N)_N$ converge au sens de Benjamini-Schramm vers l'arbre infini d -régulier \mathbb{T}_d si pour tout $R > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{x \in V_N : \rho_{G_N}(x) < R\}}{N} = 0. \quad (2.17)$$

Ceci signifie que si l'on choisit aléatoirement un sommet de G_N , alors avec une grande probabilité un grand voisinage de x dans G_N est une boule dans l'arbre infini d -régulier. Ceci est en particulier vrai quand le rayon d'injectivité global de G_N tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

Ceci implique que les mesures spectrales convergent vers la loi de Kesten-McKay [20, 27] :

Proposition 24. [1] Soit $(G_N)_N$ une suite de graphes d -réguliers convergeant au sens de Benjamini-Schramm vers \mathbb{T}_d . Pour un entier N , notons $(\lambda_j^{(N)})_j$ la suite ordonnée des valeurs propres de G_N . Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j : \lambda_j^{(N)} \in I\}}{N} = \int_I m(\lambda) \, d\lambda, \quad (2.18)$$

où m est une densité de probabilité sur \mathbb{R} , caractérisée par ses moments : pour tout $k \in \mathbb{N}$, le moment $\int \lambda^k m(\lambda) \, d\lambda$ est le nombre de chemins sur \mathbb{T}_d partant de son origine et y revenant en k pas.

Cette densité admet une expression explicite [27], mais le plus important est qu'elle est lisse et supportée sur le segment $] -2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}[$. Ceci implique que pour de grands graphes convergeant au sens de Benjamini-Schramm vers T_d , la plupart des valeurs propres appartiennent à cet intervalle, qui est l'intervalle d'intérêt pour les graphes de Ramanujan.

Chapitre 3

Surfaces hyperboliques compactes aléatoires, et leurs propriétés spectrales

Ce chapitre donne, en premier lieu, un sens à la notion de surfaces hyperboliques compactes aléatoires. Pour cela, nous pouvons considérer l'ensemble des dites surfaces, et le munir d'une mesure de probabilité. Il est alors essentiel de définir clairement notre espace univers de probabilité. Ici, nous travaillerons dans l'espace des modules, qui est l'espace des surfaces hyperboliques à isométries près ; il est décrit précisément dans la section 3.1. L'espace des modules est construit comme quotient de l'espace de Teichmüller, qui correspond à l'espace des surfaces hyperboliques à isométrie isotopiquement triviale près. Les paramètres de Fenchel-Nielsen constituent une excellente description géométrique de cet espace, en paramètres réels.

Nous présenterons ensuite une mesure de probabilité sur l'espace des modules, découlant de la forme symplectique de Weil-Petersson. Celle-ci s'exprime simplement à l'aide des paramètres de Fenchel-Nielsen, et les espérances de fonctions selon cette loi se calculent bien, grâce à une formule d'intégration de Mirzakhani [30]. Ainsi, cette mesure de probabilité est un outil de calcul maniable, et nous présentons dans la section 3.2 des applications explicites, au calcul de la longueur de découpage en pantalons [16] et au rayon d'injectivité [31].

Notre objectif est d'obtenir des informations sur le spectre de surfaces aléatoires, à l'aide de toutes ces données géométriques. Le Masson [21] démontre un théorème d'ergodicité quantique sous l'hypothèse de la convergence de Benjamini-Schramm, présentée dans le cas des graphes dans la section 2.3, et adaptée aux surfaces hyperboliques. Pour la probabilité de Weil-Petersson, les surfaces aléatoires de grand genre sont avec haute probabilité proche du plan hyperbolique, grâce aux estimations de Mirzakhani [31]. Ceci m'a permis de comparer le spectre de surfaces aléatoires à celui du plan hyperbolique, et ainsi majorer leur nombre de petites valeurs propres avec haute probabilité. Le calcul est détaillé dans la section 3.3.

3.1 Ensemble des surfaces hyperboliques compactes

3.1.1 Espace de Teichmüller

Les définitions suivantes sont tirées du chapitre 6 de [9]. Il y a beaucoup plus à dire sur le sujet, et de nombreuses subtilités topologiques et géométriques (qui ont le plus souvent des résolutions très élégantes) sont passées sous silence dans cette présentation, dans un souci de concision.

Soient g et n deux entiers naturels tels que $2g + n \geq 3$. Considérons une *surface de référence* fixée $F_{g,n}$, qui est une surface topologique de genre g avec n trous, dont le bord est constitué de

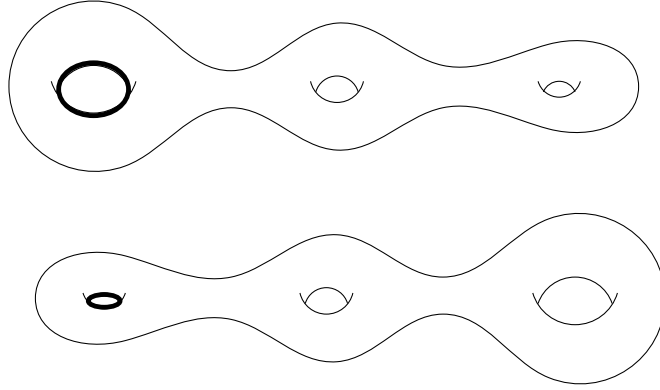


FIGURE 3.1 – Deux surfaces marquées isométriques mais distinctes dans l’espace de Teichmüller. En effet, les deux géodésiques en gras sont homotopes à un même lacet de la surface de base, mais de longueur différente.

courbes fermées lisses c_1, \dots, c_n . Lorsque $n = 0$, la surface pourra être notée F_g .

Définition 10. Une *surface hyperbolique marquée* de signature (g, n) est la donnée d’un couple (X, φ) , où :

- X est une surface hyperbolique complète de signature (g, n) .
- $\varphi : F_{g,n} \rightarrow X$ est un homéomorphisme appelé *homéomorphisme de marquage*.

Si $n \neq 0$, pour $L = (L_1, \dots, L_n)$ des réels positifs, une *surface hyperbolique marquée de longueurs de bords fixées L* est la donnée d’un couple (X, φ) , où :

- X est une surface hyperbolique à bords géodésiques de signature (g, n) .
- $\varphi : F_{g,n} \rightarrow X$ est un homéomorphisme appelé *homéomorphisme de marquage*.
- Les longueurs des géodésiques de bord de X sont les longueurs de L , dans le bon ordre :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ell_X(\varphi(c_i)) = L_i. \quad (3.1)$$

Par convention, une géodésique de longueur 0 est une pointe (ou *cusp* en anglais), donc le cas $L = (0, \dots, 0)$ correspond au cas des surfaces hyperboliques marquées.

Définition 11. Soient (X, φ) et (X', φ') des surfaces hyperboliques marquées. Elle sont *équivalentes* s’il existe une isométrie $m : X \rightarrow X'$ telle que φ' et $m \circ \varphi$ soient isotopes¹. L’ensemble des classes d’équivalence de surfaces hyperboliques marquées pour cette relation est l’*espace de Teichmüller* de signature (g, n) , noté $\mathcal{T}_{g,n}$ (ou \mathcal{T}_g lorsque $n = 0$).

Soit $L \in \mathbb{R}_+^n$ une liste de longueurs. On définit la même relation d’équivalence sur l’ensemble des surfaces hyperboliques marquées à longueurs de bords fixées, et cela définit l’*espace de Teichmüller à longueurs de bords fixées*, noté $\mathcal{T}_{g,n}(L)$.

Si $\varphi : F_{g,n} \rightarrow X$ et $\varphi' : F_{g,n} \rightarrow X$ sont isotopes, alors (X, φ) et (X, φ') sont des surfaces marquées équivalentes (avec $m = \text{id}_X$). Mais la réciproque n’est pas vraie : des surfaces X et X' isométriques ne sont pas nécessairement des surfaces marquées équivalentes. Dans la définition de cette équivalence, ce n’est pas seulement la géométrie sur X et X' qui est importante, mais aussi le fait de respecter les marquages φ et φ' , de pouvoir passer de l’un à l’autre continûment. Un exemple de ce cas de figure est illustré en Figure 3.1.

1. Des homéomorphismes $A \rightarrow B$ sont isotopes s’il existe un continuum d’homéomorphismes $f_t : A \rightarrow B$, $t \in [0, 1]$, passant de l’un à l’autre.

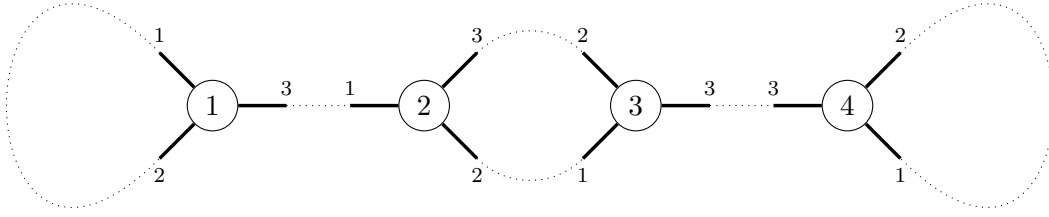
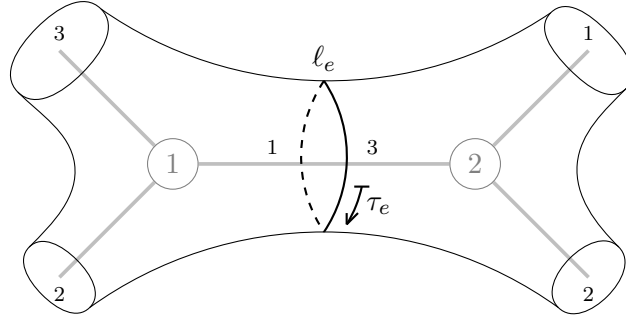


FIGURE 3.2 – Un graphe 3-régulier découpé en demi-arêtes

FIGURE 3.3 – Les pantalons Y_1 et Y_2 collés le long de l'arête e de demi-arêtes $(1, 1)$ et $(2, 3)$.

3.1.2 Construction à base de pantalons et paramètres de Fenchel-Nielsen

Dans cette partie, nous allons voir comment construire des surfaces hyperboliques compactes (donc ici $n = 0$) à l'aide d'une armature, qui sera un graphe, et de pièces élémentaires, qui seront des pantalons hyperboliques (voir la section 1.1.2). Cette construction a l'intérêt notable de décrire intégralement l'espace de Teichmüller d'un genre fixé, et ainsi de permettre de le décrire à l'aide d'un jeu de paramètres appelés *paramètres de Fenchel-Nielsen*. Pour plus de détails, voir [9].

Soit $G = (\llbracket 1, 2m \rrbracket, E)$ un graphe 3-régulier connexe à $2m$ sommets et $3m$ arêtes. Pour cette construction seulement, nous supposons que le graphe peut avoir des arêtes multiples ou des boucles simples. Coupons chaque arête en deux demi-arêtes, comme représenté en Figure 3.2. Chaque sommet $j \in \llbracket 1, 2m \rrbracket$ a donc trois demi-arêtes émanant de lui, que nous numérotions arbitrairement $(j, 1)$, $(j, 2)$ et $(j, 3)$. Il y a au total $6m$ demi-arêtes. Notons $a : E^{1/2} \rightarrow E$ l'application d'antécédent, qui à une demi-arête associe l'arête de laquelle elle est issue.

Soient $\Lambda = (\ell_e)_{e \in E}$ une famille de réels positifs, et $T = (\tau_e)_{e \in E}$ une famille de réels. Pour chaque sommet $j \in \llbracket 1, 2m \rrbracket$, considérons le pantalon hyperbolique Y_j , dont les géodésiques de bord, notées $\gamma_{(j,1)}$, $\gamma_{(j,2)}$ et $\gamma_{(j,3)}$, sont respectivement de longueur $\ell_{a(j,1)}$, $\ell_{a(j,2)}$ et $\ell_{a(j,3)}$. Elles sont paramétrées naturellement, comme décrit dans la section 1.1.2.

Soit e une arête, de demi-arêtes (j, α) et (k, β) . Nous allons coller les pantalons Y_j et Y_k le long de leurs géodésiques $\gamma_{(j,\alpha)}$ et $\gamma_{(k,\beta)}$, qui sont de même longueur ℓ_e , de la manière suivante, représentée en Figure 3.3 :

$$\forall t \in [0, \ell_e], \gamma_{(j,\alpha)}(t) = \gamma_{(k,\beta)}(-t + \tau_e). \quad (3.2)$$

Le signe $-$ permet de coller les pantalons de la manière souhaitée (sinon, ils seraient insérés l'un dans l'autre). L'angle τ_e est appelé *paramètre de twist*. Il nous donne un point de référence pour coller les deux géodésiques. Le faire varier revient à « tordre » la surface au niveau de la jonction entre les pantalons, afin de faire tourner le pantalon Y_k de cet angle, sans affecter le pantalon Y_j . Les deux géodésiques $\gamma_{(j,\alpha)}$ et $\gamma_{(k,\beta)}$ sont réunies, dans la surface obtenue, en une unique géodésique notée γ_e , qui est de longueur ℓ_e .

Si nous effectuons cette opération pour chaque arête $e \in E$, le résultat obtenu est une surface hyperbolique $X_{\Lambda, T}$ compacte, car tous les bords ont été recollés ; voir la Figure 3.4 pour une illustration.

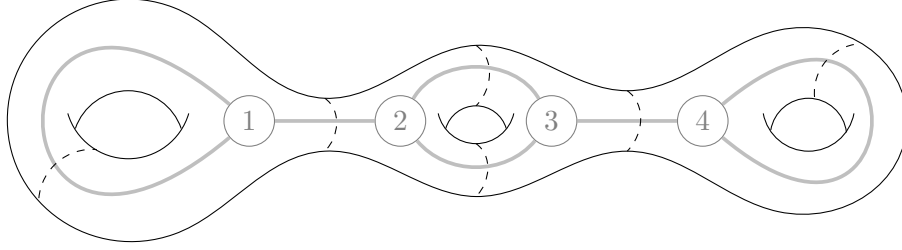


FIGURE 3.4 – Une surface obtenue en recollant les pantalons le graphe de la Figure 3.2

D'un point de vue topologique, chaque pantalon est une sphère privée de trois disques, donc de caractéristique d'Euler $\chi(Y) = \chi(\mathbb{S}^2) - 3 \times \chi(\mathbb{D}^1) = 2 - 3 \times 1 = -1$. La caractéristique de la surface $X_{\Lambda, T}$ est donc $\chi(X_{\Lambda, T}) = 2m \times \chi(Y) = -2m$. Par conséquent, le genre g de la surface $X_{\Lambda, T}$ est indépendant du graphe et des paramètres, et vérifie la relation $m = g - 1$.

Considérons la surface hyperbolique F_g , qui sera notre référence, obtenue par cette construction, avec les paramètres $\Lambda = (1, \dots, 1)$ et $T = (0, \dots, 0)$. Alors, la surface $X_{\Lambda, T}$ peut être interprétée comme une surface hyperbolique marquée construite à partir de la surface topologique F_g . Le marquage est de la forme :

$$\varphi_{\Lambda, T} = \tau_{\Lambda, T} \circ \sigma_{\Lambda} \quad (3.3)$$

où σ_{Λ} ajuste les longueurs des géodésiques extrémales des pantalons pour qu'elles correspondent aux longueurs de Λ , et $\tau_{\Lambda, T}$ tord la surface au niveau des raccords pour ajuster aux paramètres de T .

Le théorème fondamental qui permet de décrire l'espace de Teichmüller à l'aide des paramètres de Fenchel-Nielsen est le suivant :

Théorème 25 ([9]). Soit (X, φ) une surface hyperbolique marquée, de surface de référence F_g . Alors il existe un unique ensemble de paramètres Λ, T tels que (X, φ) et $(X_{\Lambda, T}, \varphi_{\Lambda, T})$ soient des surfaces marquée équivalentes. Ces paramètres sont appelés *paramètres de Fenchel-Nielsen* de la surface marquée (X, φ) .

Cette description à l'aide de paramètres permet de munir l'espace de Teichmüller d'une topologie, et même d'une structure analytique réelle, dont nous n'avons pas besoin pour ce que nous faisons ici. Il est néanmoins bon de noter que \mathcal{T}_g est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} . Si nous voulons décrire $\mathcal{T}_{g, n}$, il faut simplement ajouter à une surface de \mathcal{T}_g ses n pointes ; chacune se repère par des coordonnées sur une surface. $\mathcal{T}_{g, n}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6+2n}$.

De la même manière, il est possible de définir des coordonnées de Fenchel-Nielsen pour l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g, n}(L)$ où $n \neq 0$. Dans ce cas, le graphe G doit posséder $2(g-1) + n$ sommets, $3(g-1) + n$ arêtes, être connexe, et chaque sommet doit être au plus de degré 3 : ici, il n'est plus nécessairement 3-régulier. Ainsi, certains bords de pantalons hyperboliques ne seront pas recollés, car ils n'ont pas de demi-arête associée : il donneront les géodésiques de bord. Leur longueur est fixée par les conditions aux bords de $\mathcal{T}_{g, n}(L)$. Ceci définit comme dans le cas $n = 0$ un jeu de paramètres (Λ, T) , indexés chacun par les arêtes de G , donc au nombre total de $6(g-1) + 2n$.

3.1.3 Espace des modules

Définition 12. L'espace des *classes de marquage* $\mathfrak{M}_{g, n}$ est l'ensemble des homéomorphismes² de la surface de base $F_{g, n}$, conservant chaque composante connexe du bord c_i pour $i \in [1, n]$ en tant qu'ensemble, quotienté par la relation d'isotopie.

2. Les homéomorphismes considérés ici peuvent ne pas conserver l'orientation. Il est possible de réaliser la même construction avec l'ensemble des homéomorphismes préservant l'orientation, avec quelques différences, voir [9].

Une classe de marquage $h \in \mathfrak{M}_{g,n}$ agit sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ et l'espace de longueurs de bords fixés $\mathcal{T}_{g,n}(L)$ de la manière suivante :

$$(X, \varphi) \xrightarrow{h} (X, \varphi \circ h). \quad (3.4)$$

L'espace de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ et $\mathcal{M}_{g,n}(L)$ sont respectivement $\mathcal{T}_{g,n}$ et $\mathcal{T}_{g,n}(L)$ quotientés par cette action. Lorsque $n = 0$, on note $\mathfrak{M}_g = \mathfrak{M}_{g,0}$ et $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$.

Cette action consiste intuitivement au fait de changer de marquage en agissant sur la surface de base $F_{g,n}$. Ainsi, les surfaces hyperboliques marquées de la Figure 3.1 sont dans la même classe de l'espace des modules : il suffit d'utiliser un homéomorphisme de F_3 qui le « retourne ». Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 26. Des surfaces X et X' de $\mathcal{T}_{g,n}$ sont isométriques si et seulement s'il existe un $h \in \mathfrak{M}_{g,n}$ tel que $h \cdot X = X'$. Autrement dit, $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'ensemble des surfaces hyperboliques de signature (g, n) à isométries près.

Cette caractérisation fait de l'espace des modules un bon espace à étudier pour décrire « l'ensemble des surfaces ». Cette description en tant que quotient de l'espace de Teichmüller permet d'y faire descendre un certain nombre de notions très utiles ; pour nous, celle qui importera principalement est la notion de coordonnées de Fenchel-Nielsen, mais il y a également la topologie, la distance et la structure complexe. L'espace de Teichmüller peut également être vu comme le revêtement universel de l'espace des modules.

3.2 Densité de probabilité sur l'espace des modules

3.2.1 Le volume de Weil-Petersson

Soit $F_{g,n}$ une surface topologique de référence. Fixons $N = 3g - 3 + n$ et une famille $(\alpha_i)_{i \in [1, N]}$ de lacets sur $F_{g,n}$ la découpant en pantalons hyperboliques. À cette famille correspond un système de coordonnées de Fenchel-Nielsen comme décrit en section 3.1.2 notées $L = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ et $T = (\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Théorème 27 (Wolpert [37]). Il existe une forme symplectique naturelle w_{wp} appelée *forme symplectique de Weil-Petersson* sur $\mathcal{T}_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$ invariante par l'action du groupe des classes de marquage. Dans les coordonnées de Fenchel-Nielsen, elle s'exprime :

$$w_{wp} = \sum_{i=1}^N d\ell_{\alpha_i} \wedge d\tau_{\alpha_i}. \quad (3.5)$$

Comme il s'agit d'une forme symplectique, la $2N$ -forme différentielle $w_{wp}^{\wedge N} / N!$ est une forme volume non nulle sur $\mathcal{T}_{g,n}(L_1, \dots, L_n)$. Ceci munit l'espace de Teichmüller d'une mesure, la *mesure de Liouville* associée à w_{wp} , notée Vol_{wp} . Par invariance par l'action de $\mathfrak{M}_{g,n}$, cette mesure se transporte sur l'espace des modules, en une mesure notée de la même manière.

Pour pouvoir renormaliser le volume de Weil-Petersson et obtenir une mesure de probabilité, il faut que l'espace soit de volume fini. L'espace de Teichmüller est de volume infini, car l'intégrale de Vol_{wp} sur \mathbb{R}^{6g-6} est infinie. Mais l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,n}$ est de volume total fini, que l'on note $V_{g,n}$, ou V_g quand $n = 0$ (des estimations de ce volume sont proposées dans le Théorème 29). Ainsi, $\mathbb{P}_{wp} = V_{g,n}^{-1} \text{Vol}_{wp}$ est une mesure de probabilité sur l'espace des modules \mathcal{M}_g .

Un volume de Weil-Petersson est également défini pour les espaces de Teichmüller et des modules à longueur de bord fixé, avec les mêmes notations. Dans ce cas, on note $V_{g,n}(L)$ le volume total de $\mathcal{M}_{g,n}(L)$.

3.2.2 Intégration sur l'espace des modules

Afin d'estimer des probabilités sur l'espace des modules, il est pratique de pouvoir intégrer des fonctions. La définition suivante permet de construire des fonctions sur l'espace des modules :

Définition 13. Soit $k \geq 1$ un entier, $\mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ une famille de courbes admissible, c'est-à-dire une famille lacets simples sur la surface $F_{g,n}$, non périphériques, deux à deux disjoints, non homotopiquement triviaux et deux à deux homotopiquement distincts. L'orbite de \mathcal{C} sous l'action du groupe des classes de marquage, aussi appelé *type topologique* de \mathcal{C} , est :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}} = \{(h \cdot \gamma_1, \dots, h \cdot \gamma_k), h \in \mathfrak{M}_{g,n}\}. \quad (3.6)$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. Elle induit une fonction $f^{\mathcal{C}}$ sur l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,n}$ par la formule suivante :

$$f^{\mathcal{C}}(X) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}} f(\ell_X(\alpha_1), \dots, \ell_X(\alpha_k)). \quad (3.7)$$

Les hypothèses définissant la famille de courbes admissible font que les géodésiques de X dans leurs classes d'homotopie libre sont non triviales, simples et deux à deux disjoints, grâce au Théorème 3.

L'intégrale des fonctions de cette forme sur $\mathcal{M}_{g,n}$ peut se calculer en n'utilisant que les volumes des espaces des modules de surfaces à bord, grâce au théorème suivant :

Théorème 28 (Mirzakhani [29]). Avec les données de la définition 13, l'intégrale de $f^{\mathcal{C}}$ pour le volume de Weil-Petersson est :

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}} f^{\mathcal{C}}(X) \, d\text{Vol}_{wp}(X) = 2^{-M(\mathcal{C})} \int_{x \in \mathbb{R}_+^k} f(\mathbf{x}) V_{g,n}(\mathcal{C}, \mathbf{x}) \, \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.8)$$

où on définit les quantités suivantes :

- $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = x_1 \dots x_k \cdot dx_1 \dots dx_k$
- $M(\mathcal{C})$ est le nombre de courbes de \mathcal{C} qui séparent une poignée de genre 1 de $F_{g,n}$.
- Soit L une liste de longueur indexée par \mathcal{C} . Si $F_{g,n} \setminus \mathcal{C}$ a s composantes connexes X_1, \dots, X_s , alors pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, notons (g_i, n_i) la signature de X_i , et $(c_1^{(i)}, \dots, c_{n_i}^{(i)})$ ses composantes de bords. Pour chaque composante de bord $c_k^{(i)}$, si $c_k^{(i)}$ correspond à une courbe c de \mathcal{C} , notons $L_k^{(i)}$ la longueur L_c associée à la celle-ci, et sinon, posons $L_k^{(i)} = 0$. Alors,

$$V_{g,n}(\mathcal{C}, L) := \prod_{i=1}^s V_{g_i, n_i}(L^{(i)}), \quad (3.9)$$

où $V_{g_i, n_i}(L^{(i)})$ est le volume total de l'espace des modules $\mathcal{M}_{g_i, n_i}(L^{(i)})$ de surface de base X_i .

3.2.3 Quelques quantités quand le genre est grand

Nous allons maintenant déterminer les propriétés usuelles des surfaces compactes de grand genre à l'aide de la formule d'intégration 28. Nous avons besoin de quelques estimations avant de se lancer, que nous admettrons.

Estimations des volumes des espaces de module

D'une part, connaître le volume total de l'espace des modules \mathcal{M}_g va permettre de déterminer la constante de renormalisation dans la définition de \mathbb{P}_{wp} . Une estimation suffisante pour ce que nous allons faire ici est celle de Schumacher et Trapani [36] :

Théorème 29. Le volume de \mathcal{M}_g est, à un facteur exponentiel près, g^{2g} .

D'autre part, le Théorème 28 montre que connaître les volumes $V_{g,n}(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ pour tout jeu de courbes \mathcal{C} et vecteur de longueurs \mathbf{x} permet de calculer les intégrales de fonctions. Dès lors, un enjeu majeur pour l'étude probabiliste des surfaces de cette manière est l'obtention d'estimées précises sur ces volumes. C'est l'objet de l'article de Mirzakhani [31]. En voici quelques-unes qui nous seront utiles :

Théorème 30. Soient g, n, r, k, i des entiers positifs, et $L_1, \dots, L_n > 0$. On a :

$$V_{g,n}(L_1, \dots, L_n) \leq e^{\frac{L_1 + \dots + L_n}{2}} V_{g,n}. \quad (3.10a)$$

$$\sum_{i=r+1}^{\lceil g/2 \rceil} V_{i,1} \times V_{g-i,1} = O\left(\frac{V_g}{g^{2r+1}}\right). \quad (3.10b)$$

$$V_{g-i,k} = O(V_{g,k-2i}). \quad (3.10c)$$

Longueur totale du découpage en pantalons

Une quantité géométrique intéressante pour une surface est la longueur totale de découpage en pantalons hyperboliques, définie comme étant :

Définition 14. Un *découpage en pantalons* sur F_g est une famille \mathcal{C} de $N = 3g - 3$ lacets simples disjoints sur F_g tels que les composantes connexes de $F_g \setminus \mathcal{C}$ sont des pantalons topologiques. Ceci induit un *découpage en pantalons hyperboliques* sur $X \in \mathcal{M}_g$, en prenant dans la classe d'homotopie de chaque lacet le représentant géodésique. La *longueur totale* du découpage est la somme des longueurs des géodésiques de ce découpage.

Elle permet notamment d'estimer la complexité du fait de découper la surface en morceaux plus simples. Elle peut également être une information intéressante si nous essayons de déterminer des informations sur le spectre à l'aide de découpages et du principe du min-max (voir le Corollaire 13). Quelques estimations déterministes sont connues :

- Une surface a un découpage en pantalons de longueur totale au plus Cg^2 [11].
- Il existe des surfaces dont toutes les découpages en pantalons ont une longueur totale au moins cg (facile en construisant des revêtements de surfaces de genre 2).
- Il existe une suite de surfaces arithmétiques, une de chaque genre, dont tous les découpages en pantalons ont une longueur totale au moins $cg \log g$ [10].

Guth, Parlier et Young ont démontré l'estimation probabiliste suivante :

Théorème 31 ([16]). Pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité de Weil-Petersson qu'une surface X de \mathcal{M}_g ait un découpage en pantalons hyperbolique de longueur totale inférieure ou égale à $g^{7/6-\varepsilon}$ tend vers 0 quand g tend vers $+\infty$.

Cette borne n'est a priori pas optimale. Nous proposons ici une preuve légèrement différente de ce Théorème, utilisant pour intégrer dans l'espace des modules la formule d'intégration (28), au lieu d'estimer le volume dans l'espace de Teichmüller puis passer au quotient.

Démonstration. Soit $L > 0$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ le type topologique d'un découpage en pantalons \mathcal{C} de F_g . Considérons l'événement $\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}$ défini par : « X a un découpage de longueur totale inférieure ou égale à L de type topologique $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ ». Soit $f_L : (x_1, \dots, x_N) \mapsto \mathbb{1}_{\{x_1 + \dots + x_N \leq L\}}$. La fonction $f_L^{\mathcal{C}}$ est alors, par définition, le nombre de découpages en pantalons hyperboliques de X de longueur totale inférieure à L de type $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}) = \frac{\text{Vol}_{wp}(\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}})}{V_g} \leq \int_{\mathcal{M}_g} f_L^{\mathcal{C}}(X) \, d\text{Vol}_{wp}(X). \quad (3.11)$$

D'après la formule d'intégration 28,

$$\mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}) \leq \frac{2^{-M(\mathcal{C})}}{V_g} \int_{\Delta_N(L)} V_g(\mathcal{C}, \mathbf{x}) \, \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

où $\Delta_N(L) = \{x_1 + \dots + x_N \leq L\}$ est le simplexe de \mathbb{R}^N de côté L . Par unicité du pantalon hyperbolique à longueurs de bords fixé, $\mathcal{M}_g(\mathcal{C}, \mathbf{x})$ est réduit à un élément et $V_g(\mathcal{C}, \mathbf{x}) = 1$. De plus, $2^{-M(\mathcal{C})} \geq 1$. D'après le Théorème 29, $V_g \lesssim g^{2g}$, où (dans toute la suite) $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante des paramètres de l'énoncé telle que $A \leq CB$. Il reste donc uniquement à estimer l'intégrale :

$$I_N(L) = \int_{\Delta_N(L)} \prod_{i=1}^N x_i \, dx_1 \dots dx_N. \quad (3.13)$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique, si $x_1 + \dots + x_N \leq L$, alors :

$$\prod_{i=1}^N x_i \leq \left(\frac{L}{N}\right)^N. \quad (3.14)$$

Ensuite, le volume de $\Delta_N(L)$ s'établit par récurrence sur l'entier N en intégrant une variable. Il vaut $\frac{L^N}{N!}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}) \lesssim \frac{L^{2N}}{g^{2g} N! N^N} \lesssim \frac{L^{6g-6}}{g^{8g}}. \quad (3.15)$$

Cette probabilité concerne l'événement $\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}$, c'est-à-dire les découpages en pantalons hyperboliques de type topologique \mathcal{C} . Comme il est indépendant de \mathcal{C} , on peut conclure avec le lemme suivant :

Lemme 32. Il existe, à un facteur exponentiel près, g^g types topologiques de découpage en pantalons différents sur F_g .

En effet, si \mathcal{D}_L est l'événement « X a un découpage de longueur totale inférieure ou égale à L », alors :

$$\mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_L) \leq \sum_{\mathcal{C}} \mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_{L,\mathcal{C}}) \lesssim \frac{L^{6g-6}}{g^{7g}}. \quad (3.16)$$

Prenons maintenant un $\varepsilon > 0$, et $L = g^{7/6-\varepsilon}$. Alors,

$$\mathbb{P}_{wp}(\mathcal{D}_L) \lesssim \frac{g^{(6g-6)(7/6-\varepsilon)}}{g^{7g}} \lesssim g^{-6\varepsilon g} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.17)$$

□

Démonstration du Lemme 32. À un découpage en pantalons hyperbolique \mathcal{C} de la surface F_g on peut associer un graphe 3-régulier G dont les sommets sont les pantalons, qui sont liés par autant d'arêtes qu'il faut couper de lacets pour les séparer. Cette correspondance est bijective de par la construction de la section 3.1.2.

Soit $h \in \mathfrak{M}_g$ une classe de marquage envoyant un découpage en pantalons \mathcal{C} sur un autre \mathcal{C}' . h induit un isomorphisme de graphes³ de G à G' . Cette construction établit une bijection entre l'ensemble des types topologiques de découpages en pantalons hyperboliques et les graphes 3-réguliers à $2n$ sommets à isomorphisme près, où $n = g - 1$.

Le dénombrement de ceux-ci est fait par Bollobas [4]. Tout d'abord, on construit un graphe 3-régulier par recollement de $6n$ demi-arêtes fixées sur des sommets numérotés $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ comme dans la section 3.1.2. Le nombre d'appariements des demi-arêtes est :

$$(6n-1) \times (6n-3) \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{(6n)!}{2^{3n}(3n)!} \approx n^{3n}. \quad (3.18)$$

Le groupe de permutations \mathfrak{S}_{2n} agit sur les graphes obtenus par permutation de leurs sommets. Au sein d'une même orbite, les graphes sont isomorphes. Le nombre de graphes à isomorphisme près est

3. C'est-à-dire une paire d'applications bijectives $\varphi : V \rightarrow V'$ et $\psi : E \rightarrow E'$ telle que si e relie x et y dans G , alors $\psi(e)$ relie $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ dans G' .

donc au plus le nombre d'orbites de l'action. Estimons le nombre d'éléments dans l'orbite un graphe G , qui est $\#\mathfrak{S}_{2n}/\#\text{Stab}_{\mathfrak{S}_{2n}}(G)$. Le stabilisateur de G est constitué de permutations de ses sommets qui sont des isomorphismes, et est donc donné par l'image d'un sommet de base (au plus $2n$ choix) et une permutation des trois demi-arêtes (au plus 6 choix) de chacun des $2n$ sommets. Donc,

$$1 \leq \#\text{Stab}_{\mathfrak{S}_{2n}}(G) \leq 2n \times 6^{2n} \lesssim 1. \quad (3.19)$$

Dès lors chaque orbite a $\approx \#\mathcal{S}_{2n} \approx n^{2n}$ éléments, donc il y a $\approx n^n$ orbites. \square

Fonctions de comptage des géodésiques

Nous introduisons maintenant des fonctions qui permettront de compter les géodésiques fermées simples d'une longueur donnée, dans l'espoir qu'elles nous permettent d'obtenir des informations sur la géométrie des surfaces. Pour pouvoir intégrer les fonctions sur l'espace des modules à l'aide du Théorème 28, nous allons les construire de la forme $f^{\mathcal{C}}$ où \mathcal{C} est un ensemble de courbes sur notre surface topologique F_g . Ici l'information qui nous intéresse est la longueur d'une unique courbe, donc \mathcal{C} va être de la forme $\{\alpha\}$. Néanmoins, dans la définition 13, il est nécessaire de connaître l'orbite de α sous l'action du groupe des classes de marquage. Les géodésiques fermées vont donc être classifiées différemment selon cette orbite :

Proposition 33. Le type topologique d'un lacet simple α sur F_g est entièrement déterminé par la topologie de la surface $F_g - \alpha$ obtenue en coupant F_g le long de α . Ainsi, les types possibles sont exactement les suivants :

- α est *séparant de type* (i, m) si $F_g - \alpha$ a deux composantes connexes de signature $(i, 1)$ et $(g-i, 1)$, où $i \in \llbracket 1, \lceil g/2 \rceil \rrbracket$.
- α est *non séparant* si $F_g - \alpha$ est une surface connexe de signature $(g-1, 2)$. On dira alors par abus qu'elle est *de type* 0.

Nous pouvons donc compter chaque type de géodésiques :

Définition 15. Munissons-nous de lacets simples $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\lceil g/2 \rceil}$ sur F_g tels que α_0 est non séparant, et pour $i \in \llbracket 1, \lceil g/2 \rceil \rrbracket$, α_i est séparant de type i . Soit $L > 0$. Pour $i \in \llbracket 0, \lceil g/2 \rceil \rrbracket$, considérons la fonction N_i suivante :

$$X \in \mathcal{M}_g \mapsto N_i(X, L) = (\mathbf{1}_{[0, L]})^{\{\alpha_i\}}(X). \quad (3.20)$$

Nous notons $N(X, L) = \sum_{i=0}^{\lceil g/2 \rceil} N_i(X, L)$.

D'après la définition 13 et la caractérisation des types de courbe, $N_i(X, L)$ n'est rien d'autre que le nombre de géodésiques fermées simples de longueur inférieure ou égale à L et de type i sur la surface X . $N(X, L)$ est donc le nombre total de géodésiques fermées simples de longueur inférieure ou égale à L sur X .

Proposition 34. Les moyennes des fonctions de comptage vérifient :

$$\int_{\mathcal{M}_g} N_0(X, L) \, d\text{Vol}_{wp}(X) \leq (e^L(L-1) + 1) V_{g-1,2} \quad (3.21a)$$

$$\forall i \geq 1, \int_{\mathcal{M}_g} N_i(X, L) \, d\text{Vol}_{wp}(X) \leq (e^L(L-1) + 1) V_{i,1} V_{g-i,1}. \quad (3.21b)$$

Démonstration. En appliquant le théorème 28 aux fonctions de comptage, on obtient ⁴ :

$$\int_{\mathcal{M}_g} N_0(X, L) \, d\text{Vol}_{wp}(X) = \int_0^L V_{g-1,2}(x, x) \, x \, dx \quad (3.22a)$$

$$\int_{\mathcal{M}_g} N_1(X, L) \, d\text{Vol}_{wp}(X) = \frac{1}{2} \int_0^L V_{1,1}(x) V_{g-1,1}(x) \, x \, dx \quad (3.22b)$$

$$\forall i \geq 2, \int_{\mathcal{M}_g} N_i(X, L) \, d\text{Vol}_{wp}(X) = \int_0^L V_{i,1}(x) V_{g-i,1}(x) \, x \, dx. \quad (3.22c)$$

Or, d'après l'équation (3.10a),

$$\begin{aligned} V_{g-1,2}(x, x) &\leq e^x V_{g-1,2} \\ \forall i \geq 1, V_{i,1}(x) V_{g-i,1}(x) &\leq e^x V_{i,1} V_{g-i,1}. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'intégrer $\int_0^L x e^x dx$ pour obtenir le résultat annoncé. \square

Rayon d'injectivité

Les liens entre le rayon d'injectivité et la taille des géodésiques fermées simples explicité en 1.1.2 font que les estimations précédentes donnent des estimations du rayon d'injectivité des surfaces hyperboliques aléatoires, établies par Mirzakhani [31].

Théorème 35. Sauf pour un ensemble de probabilité de Weil-Petersson $O(g^{-1/4} \log g)$, une surface $X \in \mathcal{M}_g$ vérifie :

$$\mu\left(\left\{z \in X : \text{InjRad}_z(X) \leq \frac{\log g}{6}\right\}\right) = O(g^{11/12} \log g). \quad (3.23)$$

Démonstration. Prenons une longueur $L_g > 0$, un nombre $m_g > 0$. Nous allons étudier l'événement « avoir moins de m_g géodésiques fermées simples de longueur moins que L_g » :

$$\mathcal{A}_g = \{X \in \mathcal{M}_g : N(X, 2L_g) \leq m_g\}. \quad (3.24)$$

Montrons d'abord que si $X \in \mathcal{A}_g$, alors elle vérifie :

$$\mu(\{z \in X : \text{InjRad}_z(X) \leq L_g\}) = O(m_g L_g e^{2L_g}). \quad (3.25)$$

En effet, si un point z de X a un rayon d'injectivité inférieur à L_g , alors d'après la section 1.1.2, il est à distance au plus $2L_g$ d'une géodésique fermée simple de longueur au plus $2L_g$. Il suffit alors de majorer le volume dans X de l'ensemble des points à distance au plus $2L_g$ d'une géodésique fermée simple de longueur au plus $2L_g$. Soit γ une géodésique fermée de longueur ℓ . On la relève dans \mathcal{H} . Le volume de l'ensemble des points de X à distance inférieure à d de γ est plus petit que le volume de l'ensemble de points de \mathcal{H} ayant des coordonnées de Fermi (t, ρ) de base γ dans $[0, \ell] \times [-d, d]$. Celui-ci est, d'après la formule (1.7) :

$$\int_{-d}^d \int_0^\ell \cosh(\rho) \, dt \, d\rho = 2\ell \sinh(d) \leq 2\ell e^d. \quad (3.26)$$

Dès lors, le volume de l'ensemble des points à distance au plus $2L_g$ d'une géodésique fermée de longueur au plus $2L_g$ est majoré par $4L_g e^{2L_g}$. Si $X \in \mathcal{A}_g$, alors par définition le nombre de géodésiques γ est au plus m_g , d'où le résultat en contrôlant le volume de l'union par la somme des volumes.

4. Le facteur $1/2$ dans (3.22b) provient du fait que dans le cas de type 1, la courbe sépare une poignée de genre 1 donc $M(\alpha_1) = 1$.

Montrons maintenant que cet événement se produit avec haute probabilité.

$$\text{Vol}_{wp}(\mathcal{M}_g - \mathcal{A}_g) = \int_{\mathcal{M}_g} \mathbb{1}_{\{N(X, 2L_g) > m_g\}} d\text{Vol}_{wp}(X) \quad (3.27)$$

$$\leq \frac{1}{m_g} \int_{\mathcal{M}_g} N(X, 2L_g) d\text{Vol}_{wp}(X) \quad (3.28)$$

$$\leq \frac{1}{m_g} \sum_{i=0}^{\lceil g/2 \rceil} \int_{\mathcal{M}_g} N_i(X, 2L_g) d\text{Vol}_{wp}(X) \quad (3.29)$$

$$\leq \frac{e^{2L_g}(2L_g - 1) + 1}{m_g} \left(V_{g-1,2} + \sum_{i=1}^{\lceil g/2 \rceil} V_{i,1} V_{g-i,1} \right). \quad (3.30)$$

Alors, d'après l'équation (3.10b), et si d'autre part $L_g \rightarrow +\infty$ quand $g \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\text{Vol}_{wp}(\mathcal{M}_g - \mathcal{A}_g)}{V_g} = O\left(\frac{L_g e^{2L_g}}{m_g}\right). \quad (3.31)$$

En prenant $L_g = \frac{1}{6} \log g$ et $m_g = g^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$ dans (3.25) et (3.31), on obtient le résultat annoncé. \square

De manière similaire mais plus fine, on a l'estimation suivante :

Théorème 36 ([31]). Soit $r > 0$ petit. La probabilité de Weil-Petersson qu'une surface X appartenant à \mathcal{M}_g soit de rayon d'injectivité inférieur ou égal à r est de l'ordre de r^2 .

3.3 Convergence de Benjamini-Schramm et conséquence sur les petites valeurs propres

Dans [21], Le Masson et Sahlsten étudient le spectre et les fonctions propres de suites de surfaces hyperboliques de genre tendant vers $+\infty$, sous une condition qui est celle de la *convergence de Benjamini-Schramm* vers le plan hyperbolique; il s'agit d'une adaptation de la notion de convergence de Benjamini-Schramm présentée pour les graphes dans la section 2.3 aux surfaces hyperboliques. L'idée est de comparer les propriétés spectrales de la surface à celles connues du plan hyperbolique, sous l'hypothèse que localement la surface y ressemble (que le rayon d'injectivité est grand en la plupart des points). Dans cet article, ils utilisent la formule des traces pour démontrer un théorème d'ergodicité quantique, mais aussi pour déterminer la répartition asymptotique des valeurs propres.

J'ai utilisé ces méthodes afin de montrer qu'une surface hyperbolique prise avec le volume de Weil-Petersson a, avec grande probabilité, peu de petites valeurs propres. En effet, les estimations de Mirzakhani [31] permettent d'estimer le rayon d'injectivité de surfaces aléatoires de grand genre. Le calcul de la partie 9 de [21] permet d'en déduire que le spectre est proche de celui du plan hyperbolique, qui est $[1/4, +\infty[$. Ceci se réunit dans l'énoncé suivant :

Proposition 37. Soit $g \geq 2$ un entier naturel. Il existe une partie \mathcal{A}_g de l'espace des modules \mathcal{M}_g , dont le complémentaire est de probabilité de Weil-Petersson $O(g^{-1/9}(\log g)^4)$, telle que si $X \in \mathcal{A}_g$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $N_\varepsilon(X)$ de valeurs propres du laplacien sur X comprises entre 0 et $1/4 - \varepsilon$ vérifie :

$$\frac{N_\varepsilon(X)}{\mu(X)} \lesssim \frac{g^{-\varepsilon/72}}{(\log g)^{3/2}} \quad (3.32)$$

où (dans toute la suite) $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante des paramètres de l'énoncé telle que $A \leq CB$.

note : Cette preuve était à l'époque de l'écriture de ce mémoire encore assez bancale, et un certain nombre d'éléments ont été corrigés / améliorés depuis en vue de la parution d'un article.

Cette proposition découle du lemme déterministe suivant :

Lemme 38. Soit X une surface hyperbolique de genre $g \geq 2$, dont le rayon d'injectivité global est plus grand qu'un certain $r \in]0, 1[$. Pour tous $L > 0$, $t > 1$, $\varepsilon > 0$,

$$\frac{N_\varepsilon(X)}{\mu(X)} \lesssim \frac{e^{-\varepsilon t}}{t^{3/2}} \left[1 + \frac{te^{2t}}{r} \left(\frac{\mu(D^-(L))}{\mu(X)} + e^L e^{-L^2/8t} \right) \right], \quad (3.33)$$

où $D^-(L)$ est l'ensemble des points d'un domaine fondamental D de X ayant un rayon d'injectivité inférieur à L .

Ce lemme se démontre à l'aide du calcul fait dans la partie 9 de [21] rendu explicite en t . Montrons d'abord comment le lemme 38, conjointement aux estimations de probabilité de [31] présentées dans la partie 3.2.3, permet de démontrer le résultat.

Démonstration. Prenons $L = \frac{1}{6} \log g$. Sauf sur un ensemble de probabilités $O(g^{-1/4})$,

$$\frac{\mu(D^-(L))}{\mu(X)} \leq g^{-1/12} \log g. \quad (3.34)$$

Ceci correspond au fait qu'avec haute probabilité, notre surface est proche au sens de Benjamini-Schramm du plan hyperbolique. Prenons maintenant $t = \frac{1}{72} \log g$. Alors,

$$e^L e^{-L^2/8t} = g^{1/6} \times g^{-72/8 \times 6^2} = g^{-1/12}. \quad (3.35)$$

Si la surface a un rayon d'injectivité supérieur à $r = te^{2t} g^{-1/12} \log g$, le terme entre crochets dans le lemme 38 est $\lesssim 1$. Ceci se produit, sauf pour un ensemble de probabilité $\lesssim r^2$. Or, $r \lesssim \log g g^{1/36} g^{-1/12} \log g = g^{-1/18} (\log g)^2$.

Donc, sauf pour un ensemble de probabilité $\lesssim g^{-1/4} + g^{-1/9} (\log g)^4 \lesssim g^{-1/9} (\log g)^4$,

$$\frac{N_\varepsilon(X)}{\mu X} \lesssim \frac{e^{-\varepsilon t}}{t^{3/2}} \lesssim \frac{g^{-\varepsilon/72}}{(\log g)^{3/2}}. \quad (3.36)$$

□

Maintenant il ne reste plus qu'à démontrer le lemme. Le point de départ de la preuve est l'utilisation de la formule de la prétrace, présentée dans la section 1.3.3, avec les noyaux de la chaleur présentés en section 1.2.4. Ensuite, il s'agit de faire le lien entre le terme de la formule faisant intervenir les valeurs propres et le nombre $N_\varepsilon(X)$, et d'estimer les autres termes.

Démonstration. Notons $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ la suite ordonnée des valeurs propres du laplacien sur X , et $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ les fonctions propres normalisées associées. Pour $j \in \mathbb{N}$, notons r_j une des solutions complexes de $\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$.

Soit D un domaine fondamental de X , et Γ un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $X = \mathbb{H}/\Gamma$.

Pour rappel, la formule de la prétrace pour une fonction h de noyau associé k est :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h(r_j) |\psi_j(z)|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h(\rho) \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + \sum_{\gamma \in \Gamma - \{\mathrm{id}\}} k(d(z, \gamma \cdot z)) \quad (3.37)$$

Appliquons-la à la fonction $h_t : r \mapsto \exp(-t(\frac{1}{4} + r^2))$, associée au noyau de la chaleur p_t . Une fois intégrée sur D , cette formule devient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_j} = \frac{\mu(X)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(1/4 + \rho^2)} \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + R(X, t) \quad (3.38)$$

où le reste $R(X, t)$ s'exprime de la manière suivante :

$$R(X, t) = \int_D d\mu(z) \sum_{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}} p_t(d(z, \gamma \cdot z)). \quad (3.39)$$

Établissons le lien entre $N_\varepsilon(X)$ et la formule (3.38). Soit j un entier naturel. Alors :

$$\begin{cases} e^{-t(1/4-\varepsilon)} \leq e^{-t\lambda_j} & \text{si } 0 \leq \lambda_j \leq 1/4 - \varepsilon \\ 0 \leq e^{-t\lambda_j} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.40)$$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient :

$$N_\varepsilon(X) \times e^{-t(1/4-\varepsilon)} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_j}. \quad (3.41)$$

Dès lors, l'estimation (3.38) devient :

$$N_\varepsilon(X) \leq e^{\varepsilon t} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-t\rho^2} \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + e^{t/4} R(X, t) \right]. \quad (3.42)$$

Estimons d'abord l'intégrale, par le changement de variable $u = \rho\sqrt{t}$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t\rho^2} \tanh(\pi\rho) \rho d\rho = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \tanh(\pi u/\sqrt{t}) u du. \quad (3.43)$$

Comme pour tout $v \geq 0$, $\tanh(v) \leq v$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t\rho^2} \tanh(\pi\rho) \rho d\rho \leq \frac{\pi}{t^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} u^2 du \lesssim \frac{1}{t^{3/2}}. \quad (3.44)$$

Estimons maintenant le reste (3.39). Pour un point $z \in D$, nous allons découper la somme en γ en fonction de la distance de z à $\gamma \cdot z$, ce qui permettra de contrôler le noyau de la chaleur. On note $k(z)$ la partie entière inférieure de $\text{InjRad}_z(X)$. Soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \text{id}$. Il existe un entier k tel que :

$$k \leq d(z, \gamma \cdot z) < k + 1.$$

D'après le lemme 10,

$$p_t(d(z, \gamma \cdot z)) \lesssim \frac{e^{-t/4-k^2/8t}}{t}.$$

D'après la définition du rayon d'injectivité, $k \geq k(z)$. On peut donc regrouper les termes du reste de la manière suivante :

$$R(X, t) \lesssim \int d\mu(z) \sum_{k=k(z)}^{+\infty} \frac{e^{-t/4-k^2/8t}}{t} \times \#\{\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\} \mid k \leq d(z, \gamma \cdot z) < k + 1\}. \quad (3.45)$$

Un raisonnement géométrique sur les rayons d'injectivité, représenté en Figure 3.5, permet de contrôler les cardinaux présents dans cette inéquation. En effet, comme le rayon d'injectivité global de la surface est plus grand que r , pour tout $w \in X$ fixé, les boules de centre $\gamma \cdot w$ et de rayon $r/2$, où $\gamma \in \Gamma$, sont deux à deux disjointes. Par conséquent, tous les $\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}$ tels que $d(z, \gamma \cdot z) < k + 1$ sont entourés de boules disjointes de volume $\cosh(r/2) - 1$, qui sont toutes incluses dans la boule de centre z et de rayon $k + 1 + r/2$, qui est elle-même de volume $\cosh(k + 1 + r/2) - 1$. Leur nombre est donc au plus :

$$\frac{\cosh(k + 1 + r/2) - 1}{\cosh(r/2) - 1} \lesssim \frac{e^k}{r}. \quad (3.46)$$

Dès lors, l'estimation du reste devient :

$$R(X, t) \lesssim \frac{e^{-t/4}}{rt} \int_D d\mu(z) \sum_{k=k(z)}^{+\infty} e^{-k^2/8t+k}.$$

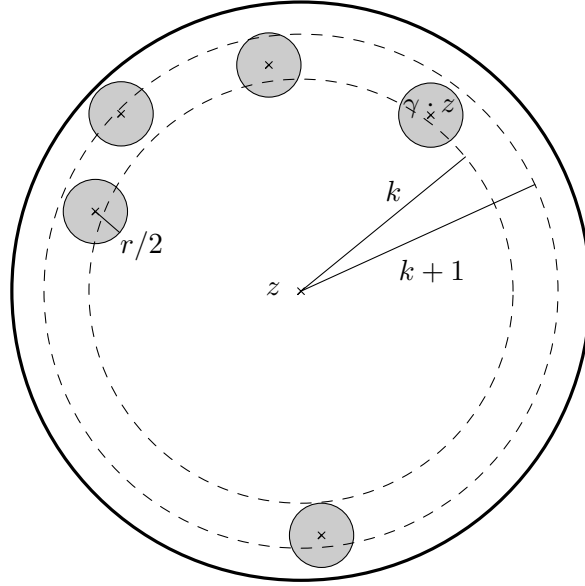


FIGURE 3.5 – Le raisonnement de l'estimation (3.46). Les boules grisées sont disjointes et incluses dans la boule en gras, ce qui donne une majoration de leur nombre.

On fixe un réel $L > 1$ et découpe l'intégrale entre

$$D^-(L) = \{z \in X \mid \text{InjRad}_z(X) < L\}$$

et $D^+(L)$ son complémentaire. Si $z \in D^-(L)$, alors :

$$\int_{D^-(L)} d\mu(z) \sum_{k=k(z)}^{+\infty} e^{-k^2/t+k} \leq \mu(D^-(L)) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2/8t+k}.$$

On contrôle cette somme par une comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2/8t+k} &\leq e^{2t} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2/8t+u} du \leq 1 + e^{2t} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(u-4t)^2}{8t}} du \\ &\leq 1 + e^{2t} \sqrt{8t} \int_{-\sqrt{2t}}^{+\infty} e^{-v^2} dv \leq 1 + e^{2t} \sqrt{8t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv \\ &\lesssim e^{2t} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Si $z \in D^+(L)$, alors $k(z) \geq \lfloor L \rfloor$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=k(z)}^{+\infty} e^{-k^2/8t+k} &\leq \sum_{k=\lfloor L \rfloor}^{+\infty} e^{-k^2/t+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+\lfloor L \rfloor)^2/8t+k+\lfloor L \rfloor} \\ &\leq e^{\lfloor L \rfloor} e^{-\lfloor L \rfloor^2/8t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2/8t+k} \\ &\lesssim e^L e^{-L^2/8t} e^{2t} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

On contrôle $\mu(D^+(L))$ par le volume total de X . Donc on obtient la majoration suivante, de laquelle découle le lemme déterministe :

$$e^{t/4}R(X, t) \lesssim \frac{e^{2t}}{r\sqrt{t}} \left(\mu(D^-(L)) + e^L e^{-L^2/8t} \mu(X) \right).$$

□

Voici quelques pistes que nous pouvons améliorer :

- Dans l'estimation du noyau de la chaleur, le $1/8$ peut être remplacé par n'importe quel nombre plus petit que $1/4$, et nous pourrions ajuster les exposants tirés des estimations de Mirzakhani au calcul présent. L'exposant $g^{-\varepsilon/72}$ n'est ainsi pas optimal.
- Nous pourrions utiliser une meilleure fonction test que le noyau de la chaleur ; par exemple une fonction compacte en fréquence et décroissant le plus vite possible en espace autour de la valeur $1/4$ (voir [26]). Ceci pourrait améliorer l'exposant $(\log g)^{3/2}$, qui est crucial dans le cas où $\varepsilon = 0$ (estimation du nombre de petites valeurs propres).

Conclusion et perspectives

Notre objectif principal pour ce travail était de déterminer si l'idée d'apporter des méthodes probabilistes à l'étude du spectre des surfaces hyperboliques était fructueuse. La notion de surfaces hyperboliques aléatoires définie via le volume de Weil-Petersson, sa maniabilité et ses liens forts avec des propriétés géométriques des surfaces (pouvant ensuite être ramenées au spectre grâce à la formule des traces par exemple) établissent selon nous l'intérêt de cette idée, et son actualité.

Je présente ici quelques perspectives et directions de travail pour la suite, ainsi que l'état des lieux de quelques pistes explorées au cours de ce travail. Il y a principalement deux axes : continuer le travail effectué avec le volume de Weil-Petersson afin d'établir d'autres résultats probabilistes, et étudier d'autres méthodes probabilistes plus combinatoires.

Volume de Weil-Petersson

Théorème d'Alon-Friedman et hypothèse de *tangle-free* Un équivalent du Théorème d'Alon-Friedman (voir la section 2.2.4) pour les graphes réguliers serait de démontrer qu'avec haute probabilité, les surfaces hyperboliques compactes ont un trou spectral proche de $1/4$:

Conjecture 39. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{wp}(\lambda_1(X) \leq 1/4 - \varepsilon) = 0. \quad (3.47)$$

L'équivalent de l'hypothèse de *tangle-free* de la preuve de Bordenave consisterait à annoncer qu'avec haute probabilité, il ne peut y avoir plusieurs géodésiques fermées de longueur de l'ordre de $\log g$ à distance de l'ordre de $\log g$ l'une de l'autre. Nous aimerions établir ce genre de propriété pour le volume de Weil-Petersson indépendamment d'une preuve de la conjecture précédente, car elle pourrait se révéler utile dans d'autres circonstances.

Un autre résultat d'objectif similaire à l'hypothèse de *tangle-free* est le suivant :

Théorème 40 ([4]). Soit G un graphe choisi de manière uniforme sur $\mathcal{G}_d(n)$. Pour $i \in \mathbb{N}$, notons X_i le nombre de chemins fermés dans G de longueur i . Alors, les variables aléatoires X_i sont asymptotiquement des lois de Poissons indépendantes de valeur moyenne $2^i/2i$.

Dans [7], les auteurs utilisent ce résultat pour démontrer que les petits chemins fermés dans un graphe régulier aléatoire sont loin les uns des autres. Nous pourrions adapter le Théorème 40 au cas des surfaces hyperboliques aléatoires, et déterminer la loi de probabilité du nombre de géodésiques fermées simples d'une certaine longueur, et leur indépendance asymptotique.

Propriétés des surfaces à grand trou spectral Les propriétés des graphes de Ramanujan dans de nombreux domaines, exposées dans [18], motivent la recherche de propriétés similaires pour les surfaces ayant un grand trou spectral. Une « surface de Ramanujan » serait alors une surface n'ayant aucune valeur propre inférieure à $1/4$. Il semble raisonnable d'attendre de ces surfaces de bonnes propriétés concernant la vitesse de mélange du flot géodésique, qui seraient la contrepartie des résultats de cutoff pour la marche aléatoire présentés dans la section 2.2.2.

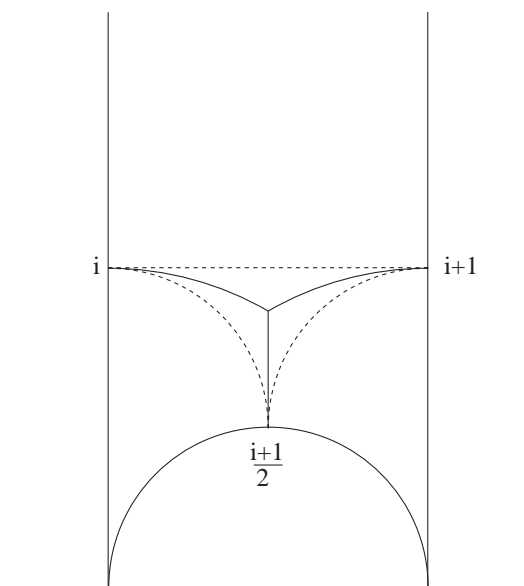


FIGURE 3.6 – Le triangle hyperbolique marqué idéal [7].

Approches combinatoires

Dans le chapitre 2, les approches probabilistes qui enrichissent l'étude de la théorie spectrale des graphes ne sont pas limitées au fait de choisir un graphe aléatoire d -régulier. Similairement, il y a de nombreuses autres manières de faire intervenir les probabilités dans notre étude du spectre des surfaces hyperboliques, et nous présentons quelques pistes et éléments de littérature ici.

Construction à base de pièces élémentaires Brooks et Makeover proposent dans [7] une construction de surfaces hyperboliques aléatoires discrète à partir de graphes 3-réguliers orientés, et déterminent avec haute probabilité un certain nombre de caractéristiques de leurs surfaces à l'aide de celles du graphe sous-jacent. Je décris ici la construction des surfaces, les résultats probabilistes obtenus et les mets en perspective avec ce que nous souhaitons étudier.

Considérons un graphe 3-régulier G à $2n$ sommets, muni d'une orientation \mathcal{O} , qui est un ordre cyclique sur l'ensemble des arêtes émanant de chaque sommet. Cela est équivalent au fait de donner un sens à la notion d'aller à gauche ou à droite en marchant sur G ; dans ce cas, l'ordre cyclique de chaque sommet est (l'arête de laquelle on vient, celle de gauche, celle de droite). Le *triangle marqué idéal* de base est le triangle hyperbolique T reliant les points 0 , 1 et $+\infty$, marqué aux points des sommets i , $i+1$ et $\frac{i+1}{2}$. Il est représenté en Figure 3.6, avec des morceaux de géodésiques reliant son centre et ses trois marquages. La surface hyperbolique $X(G, \mathcal{O})$ est obtenue en associant à chaque sommet x de G une copie T_x de T , à chaque arête émanant de x un côté de T_x de sorte que l'orientation \mathcal{O} des arêtes émanant de x corresponde à l'ordre cyclique $(i, i+1, \frac{i+1}{2})$ des côtés de T_x . On colle ensuite les triangles T_x et T_y si $x \sim y$ dans G , le long des côtés de T_x et T_y correspondant à l'arête $x \sim y$, de sorte que les points marqués desdites arêtes soient identifiés et l'orientation des deux triangles coïncide.

La surface hyperbolique obtenue $X(G, \mathcal{O})$ est uniquement déterminée par la donnée du graphe G et de son orientation \mathcal{O} . Elle est complète, d'aire $2\pi n$. Si l'on regarde les chemins géodésiques sur la Figure 3.6, on constate qu'une copie orientée de G est dessinée en portions de géodésiques sur elle. Son nombre de pointes est égal au nombre ℓ de chemins fermés sur G n'admettant que virages à gauche, et son genre est $g(G, \mathcal{O}) = 1 + \frac{n-\ell}{2}$. La largeur des pointes de $X(G, \mathcal{O})$ est liée à la longueur des chemins à gauche. Si elles sont plus grandes qu'une certaine longueur L (on dit alors que $X(G, \mathcal{O})$

vérifie la condition de larges pointes), alors on peut la compactifier en une unique surface hyperbolique compacte $X_{\text{comp}}(G, \mathcal{O})$ telle que, en dehors d'un voisinage des pointes de $X(G, \mathcal{O})$, les métriques hyperboliques sont équivalentes. Les surfaces créées ainsi sont denses dans l'ensemble des surfaces hyperboliques compactes.

Il suffit alors de définir une mesure de probabilité sur l'ensemble des graphes 3-réguliers orientés pour obtenir une mesure de probabilité sur une partie dense de l'ensemble des surfaces hyperboliques compactes. Les auteurs ont choisi le modèle de Bollobás [4] : les $6n$ demi-arêtes sont mises dans une urne, puis tirées par paires sans remise. L'orientation est donnée par l'ordre dans lequel les arêtes ont été tirées.

On a alors les résultats géométriques suivants :

Théorème 41 ([7]). Il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ telles que les événements suivants ont une probabilité tendant vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$:

1. La première valeur propre de $X_{\text{comp}}(G, \mathcal{O})$ est plus grande que c_1 ;
2. La constante de Cheeger de $X_{\text{comp}}(G, \mathcal{O})$ est plus grande que c_2 ;
3. La plus petite géodésique de $X_{\text{comp}}(G, \mathcal{O})$ est plus longue que c_3 ;
4. Le diamètre de $X_{\text{comp}}(G, \mathcal{O})$ est inférieur à $c_4 \log(g(G, \mathcal{O}))$.

Le fait que le rayon d'injectivité soit minoré par une constante avec haute probabilité, comparé au Théorème 36, nous permet de voir que nous n'avons pas les mêmes comportements qualitatifs pour ce modèle et la mesure de Weil-Petersson. De plus, ce modèle donne beaucoup d'importance aux pointes (même si elles sont retirées par compactification), ce qui ne nous intéresse pas.

Néanmoins, cette étude montre qu'il est possible d'obtenir des informations spectrales intéressantes en effectuant des collages probabilistes, et il est envisageable d'explorer cette piste avec d'autres composants élémentaires.

Étude des revêtements finis d'une surface hyperbolique Dans la section 2.2.3, nous avons effectué des revêtements aléatoires d'un graphe vérifiant une bonne propriété spectrale (être de Ramanujan), pour exhiber un revêtement qui la vérifie également, et est plus grand. Nous pourrions imaginer faire des choses similaires pour les surfaces hyperboliques, et c'est pourquoi j'ai étudié les relations entre le spectre d'une surface et le spectre de ses revêtements.

Soit $X = \mathcal{H}/\Gamma$ une surface hyperbolique compacte. Soit Γ_0 un sous-groupe distingué de Γ d'indice fini $n > 1$. Γ_0 est le noyau d'un caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{U}_n$, où \mathbb{U}_n est le groupe multiplicatif des racines n -ièmes de l'unité dans \mathbb{C}^* .

Γ_0 est alors un groupe cocompact. Soit $X_0 = \mathcal{H}/\Gamma_0$ la surface hyperbolique compacte associée. Notons que si $D \subset \mathcal{H}$ est un domaine fondamental à frontière de mesure nulle pour l'action de Γ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des représentants de chaque classe de Γ/Γ_0 , alors le domaine D_0 défini comme l'union $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i \cdot D$ est un domaine fondamental de l'action de Γ_0 de frontière de mesure nulle (voir [19]).

Plaçons-nous dans un cas simple où le quotient Γ/Γ_0 est cyclique, engendré par un élément γ_0 . Notons ω son image par χ , qui est une racine primitive n -ième de l'unité. γ_0 est une isométrie non triviale de X_0 d'ordre n , qui commute avec le laplacien. Ceci permet de restreindre l'étude des n problèmes spectraux suivants, définis sur les espaces propres de $f \mapsto f \circ \gamma_0$:

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f \\ f(\gamma_0 \cdot z) = \omega^k f(z). \end{cases} \quad (3.48)$$

L'équivalent de la relation de moyenne (2.15) qui faisait le lien entre les valeurs propres des différents revêtements d'un graphe pourrait être la formule des traces de Selberg revisitée : Si h vérifie les hypothèses du Théorème 15, et $(\lambda_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}$ est la suite de valeurs propres du problème spectral d'ordre k (3.48), et $r_j^{(k)}$ vérifie $\lambda_j^{(k)} = 1/4 + (r_j^{(k)})^2$, alors :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} h(r_j^{(k)}) = \frac{\mu(X)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h(\rho) \tanh(\pi\rho) \rho d\rho + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\gamma \in \gamma_0^m \Gamma_0} \frac{\omega^{km} \Lambda(\gamma)}{2 \cosh(\ell(\gamma)/2)} g(\ell(\gamma)). \quad (3.49)$$

Ces formules sont un cas particulier de celles que Randol utilise dans [33] afin de démontrer que toute surface hyperbolique compacte admet un revêtement ayant un nombre arbitrairement grand de petites valeurs propres.

Il est éventuellement possible de trouver une manière de choisir aléatoirement Γ_0 pour que l'espérance de cette formule soit simple, ce qui constituerait un équivalent de (2.15). La formule des traces contenant beaucoup d'informations concernant le spectre, ceci pourrait permettre de trouver des propriétés des revêtements et de construire des surfaces de grand genre ayant certaines propriétés. Néanmoins, la seconde partie de [24] ne peut probablement pas nous aider, car les techniques utilisées sont propres à la dimension finie.

Il est également possible de faire des revêtements à partir d'un découpage en pantalons. Soit X une surface hyperbolique obtenue en collant des pantalons selon un graphe G . Soit G_0 un 2-revêtement de G , construit comme dans la section 2.2.3. Il existe une unique manière de coller des copies des pantalons constituant X pour créer une surface X_0 qui est un 2-revêtement de X . Ceci est réalisable pour des revêtements d'ordre plus grand que 2, en prenant des revêtements d'ordre plus grand du graphe squelette. Cette méthode de construction de revêtement est strictement incluse dans la précédente. Néanmoins, a priori, la formule (3.49) se moyenne mal selon cette modélisation.

Bibliographie

- [1] Nalini ANANTHARAMAN : Quantum Ergodicity on Regular Graphs. *Communications in Mathematical Physics*, 353(2):633–690, 2017.
- [2] Itai BENJAMINI et Oded SCHRAMM : Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electronic Journal of Probability*, 2001.
- [3] Nicolas BERGERON : *Le spectre des surfaces hyperboliques*. CNRS Éditions, 2011.
- [4] Béla BOLLOBÁS : *Random Graphs*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] Charles BORDENAVE : A new proof of Friedman’s second eigenvalue Theorem and its extension to random lifts. *arXiv :1502.04482*, 2015.
- [6] Haim BREZIS : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, NY, 2010.
- [7] Robert BROOKS et Eran MAKOVER : Random Construction of Riemann Surfaces. *arXiv :math/0106251*, 2001.
- [8] Peter BUSER : Cubic graphs and the first eigenvalue of a Riemann surface. *Mathematische Zeitschrift*, 162(1):87–99, 1978.
- [9] Peter BUSER : *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [10] Peter BUSER et Peter SARNAK : On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J.H. Conway and N.J.A. Sloane). *Inventiones mathematicae*, 117(1):27–56, 1994.
- [11] Peter BUSER et Mika SEPPÄLÄ : Symmetric pants decompositions of Riemann surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 67(1):39–55, 1992.
- [12] Isaac CHAVEL : *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press, 1984.
- [13] Mircea CRAIOVEANU, Mircea PUTA et Themistocles M. RASSIAS : *Old and New Aspects in Spectral Geometry*. Springer, Netherlands, 2001.
- [14] Joel FRIEDMAN : A proof of Alon’s second eigenvalue conjecture and related problems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 195(910), 2008.
- [15] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [16] Larry GUTH, Hugo PARLIER et Robert YOUNG : Pants Decompositions of Random Surfaces. *Geometric and Functional Analysis*, 21(5):1069–1090, octobre 2011.
- [17] Ole J. HEILMANN et Elliott H. LIEB : Theory of monomer-dimer systems. *Communications in Mathematical Physics*, 25(3):190–232, 1972.
- [18] Shlomo HOORY, Nathan LINIAL et Avi WIGDERSON : Expander graphs and their applications. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43(04):439–562, 2006.
- [19] Svetlana KATOK : *Fuchsian Groups*. University of Chicago Press, 1992.
- [20] Harry KESTEN : Symmetric random walks on groups. *American Mathematical Society*, 1959.
- [21] Etienne LE MASSON et Tuomas SAHLSTEN : Quantum ergodicity and Benjamini-Schramm convergence of hyperbolic surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 166(18):3425–3460, 2017.

- [22] Eyal LUBETZKY et Yuval PERES : Cutoff on all Ramanujan graphs. *arXiv :1507.04725*, 2015.
- [23] Alexander LUBOTZKY, Ralph S. PHILLIPS et Peter SARNAK : Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8(3):261–277, 1988.
- [24] Adam MARCUS, Daniel A. SPIELMAN et Nikhil SRIVASTAVA : Interlacing Families I : Bipartite Ramanujan Graphs of All Degrees. *arXiv :1304.4132*, 2013.
- [25] Gregori A. MARGULIS : Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators. *Problemy Peredachi Informatsii*, 24(1):51–60, 1988.
- [26] Javad MASHREGHI, Fedor NAZAROV et Victor P. HAVIN : Beurling–Malliavin multiplier theorem : the seventh proof. *Algebra i Analiz*, 2005.
- [27] Brendan D. MCKAY : The expected eigenvalue distribution of a large regular graph. *Linear algebra and its applications*, 1981.
- [28] Henry P. MCKEAN : An upper bound to the spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, 1970.
- [29] Maryam MIRZAKHANI : Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 167(1):179–222, 2007.
- [30] Maryam MIRZAKHANI : On Weil-Petersson Volumes and Geometry of Random Hyperbolic Surfaces. *Mathematics Subject Classification (2010)*. Primary 32G15 ; Secondary 57M50, 2010.
- [31] Maryam MIRZAKHANI : Growth of Weil-Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus. *Journal of Differential Geometry*, 2013.
- [32] A. NILLI : On the second eigenvalue of a graph. *Discrete Mathematics*, 91(2):207–210, 1991.
- [33] Burton RANDOL : Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80:996–1000, 1974.
- [34] Walter RUDIN : *Functional analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [35] Paul SCHMUTZ : New results concerning the number of small eigenvalues on Riemann surfaces. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 471:201–220, 1996.
- [36] Georg SCHUMACHER et Stefano TRAPANI : Estimates of Weil-Petersson Volumes via Effective Divisors. *Communications in Mathematical Physics*, 222(1), 2001.
- [37] Scott WOLPERT : An elementary formula for the Fenchel-Nielsen twist. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 56(1):132–135, 1981.